Aufgaben zu Primfaktoren

Aufgabe 1

Begründe, dass die Zahl 1 keine Primzahl ist.

Aufgabe 2 Sieb des Eratosthenes

Um Primzahlen zu finden, kann man das folgende Verfahren durchführen, das sogenannte „*Sieb des Eratosthenes*". Zuerst wird die Zahl 1 gestrichen. Die Zahl 2 wird umkreist und dann alle Vielfachen von ihr gestrichen. Dann wird die nach der 2 nächste nicht gestrichene Zahl, die 3, umkreist und alle Vielfachen von ihr gestrichen. Jetzt wird die nach der 3 nächste freie Zahl umkreist (die 5) und ihre Vielfachen gestrichen, usw. Den Anfang siehst du im folgenden Beispiel. Fertige eine Tabelle der Zahlen bis 100 an und führe das Schema vollständig durch - umkreist bleiben nur die Primzahlen übrig. Notiere alle Primzahlen zwischen 1 und 100.

Aufgabe 3 Mersenne-Zahlen

„*Wenn man eine beliebige natürliche Zahl k wählt und dann $2^k - 1$ berechnet, so erhält man stets eine Primzahl, z.B.* $2^2 - 1 = 3$". Ist diese Aussage richtig? Begründe.

Aufgabe 4

a) Berechne für $k = 3$ bis $k = 6$ das Produkt der ersten k Primzahlen und addiere 1 dazu.
für $k = 1$: $2 + 1 = 3$
für $k = 2$: $2 \cdot 3 + 1 = 7$

b) Teile (mit Rest) die Ergebnisse jeweils durch die verwendeten Primzahlen. Was fällt dir auf und wieso ist das so?

c) Welche Ergebnisse aus a) sind Primzahlen? Wieso ist das so? (Begründe)

Aufgabe 5

Ermittle die Primfaktorzerlegung von 18, 51, 60 und 100

Aufgabe 6

Fasst man alle Zahlen zusammen die eine bestimmte Zahl n teilen, so nennt man diese Menge die Teilermenge T_n. So ist $T_{12} = \{1,2,3,4,6,12\}$ und $T_{15} = \{1,3,5,15\}$.

a) Gib T_{14}, T_{32} und T_{60} vollständig an

b) Betrachte die Primfaktorzerlegung von 24 und die Primfaktorzerlegungen aller Teiler von 24. Formuliere eine Vermutung auf, wie man geschickt die Teiler einer Zahl, mit Hilfe der Primfaktorzerlegung, bestimmen kann. Begründe deine Vermutung.

c) (Zusatz) Die Mächtigkeit $|T_n|$ einer Teilermenge gibt an, wie viele Teiler eine Zahl hat. So ist $|T_{12}| = 6$ und $|T_{15}| = 4$.
   - Ermittle die Mächtigkeiten $|T_1|$ bis $|T_{16}|$.
   - Drücke die Definition von Primzahlen mit Hilfe des Begriffes Teilermenge aus.
   - $|T_{12}|$ und $|T_{60}|$ fallen auf, da sie für ihren Zahlenbereich besonders groß sind. Wieso ist das besonders geschickt bei der Angabe von Zeiten in Stunden und Minuten?

Aufgabe 7 Hasse-Diagramme

Besteht die Primfaktorzerlegung nur aus 2 Primzahlen (z.B. $72 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3$), so lässt sich die Teilermenge als sogenanntes Hasse-Diagramm veranschaulichen. Man beginnt mit der 1 und schreibt in die 1. Zeile die Potenzen der einen Primzahl 2, $2^2 = 4$ und $2^3 = 8$ in in die Spalte die Potenzen der zweiten Primzahl 3 und $3^2 = 9$. Das Hasse-Diagramm beinhaltet alle Teiler und an den Seiten lässt sich mit etwas Nachdenken die Primfaktorzerlegung ablesen.

$$\begin{array}{ccccccc}
1 & \cdots & 2 & \cdots & 4 & \cdots & 8 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
3 & \cdots & 6 & \cdots & 12 & \cdots & 24 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
9 & \cdots & 18 & \cdots & 36 & \cdots & 72
\end{array}$$

2D-Hasse-Diagramm

a) Betrachte das Beispiel und erstelle jeweils 2D-Hasse-Diagramme für 12, 108 und 200

b) Erstelle jeweils ein Hasse-Diagramm für 8, 32 und 81. Wieso können diese als 1D-Hasse-Diagramme bezeichnet werden?

c) Überlege dir wie du ein 3D-Hasse-Diagramm darstellen kannst und veranschauliches es am Beispiel der 60.

p.gohn@htg-loe.de