1 Aussagenlogik und Beweistechniken

Def. 1
Als **Aussage** bezeichnet man in der Logik einen Ausdruck, der entweder *wahr (w bzw. 1)* oder *falsch (f bzw. 0)* sein kann. Dies nennt man den Wahrheitswert der Aussage.

Wir benutzen i.A. große lateinische Buchstaben vom Anfang des Alphabets als Platzhalter für beliebige Aussagen.

Def. 2
Ein Ausdruck der eine oder mehrere Variablen enthält und durch „Einsetzen“ zur Aussage wird, nennt man **Prädikat** oder Aussageform.

Beispiel 1

- $\mathcal{A}$ 1+1=2
- $\mathcal{B}$ Das Quadrat einer beliebigen geraden Zahl ist gerade
- $\mathcal{C}$ 1=2
- $\mathcal{D}$ 5 ist negativ
- $\mathcal{E}$ Jede gerade Zahl $n > 2$ kann als Summe zweier Primzahlen geschrieben werden (*Goldbachsche Vermutung*)
- $\mathcal{P}(n)$ n ist gerade

Operatoren - Verknüpfung von Aussagen

Aus bestehenden Aussagen können wir mithilfe von so genannten Operatoren neue Aussagen gewinnen. Ein Operator („*Aussagenfunktion*“) nimmt eine bestimmte Anzahl von Aussagen entgegen und ordnet diesen - abhängig von ihrem Wahrheitswert - entweder w oder f zu. Ein Operator macht also aus einer oder mehreren Aussagen eine neue Aussage.

Def. 3
Die **Negation** („*Negationsoperator*“) $\neg\mathcal{A}$ ordnet einer Aussage $\mathcal{A}$ ihr Gegenteil zu.

Ein Operator wird also dadurch definiert, dass festgelegt wird, was für ein Wahrheitswert bei welcher Wahrheitswertkombination der Operanden (*Grundaussagen*) welcher Wahrheitswert ausgegeben werden soll. Vereinfacht stellt man dies in Wahrheitstafeln (Wahrheitstabellen) dar.

Das sind Tabellen, in denen jede Spalte eine Aussage repräsentiert und jede Zeile eine mögliche Kombination von Wahrheitswerten.

$\mathcal{A}$	$\neg\mathcal{A}$
w	f
f	w

Es wird deutlich, dass die Negation der einzig „interessante“ einstellige Operator ist. Mehrstellige Operatoren werden auch Junktoren oder Verknüpfungen genannt.

Def. 4

Konjunktion „Und“ - $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$ ist genau dann wahr, wenn sowohl $\mathcal{A}$ als auch $\mathcal{B}$ wahr sind;

Disjunktion „Oder“ - $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ ist genau dann wahr, wenn mindestens eine der Aussagen wahr ist; (Achtung aus dem alltäglichen Sprachgebrauch wird „oder“ oft als „entweder..., oder...“ ;

Kontravalenz „Entweder..., oder...“ $\mathcal{A} \veebar \mathcal{B}$ genau eine der beiden Aussagen ist wahr (weniger gebräuchlich);

Implikation „Wenn..., dann...“ - $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ ist immer wahr, es sei denn $\mathcal{A}$ ist wahr und $\mathcal{B}$ falsch;

Äquivalenz „... genau dann, wenn ...“ - $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$ ist wahr wenn die Wahrheitswerte von $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ identisch sind

Beispiel 2
$\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ ist wahr, weil $\mathcal{A}$ wahr ist, somit ist egal ob wir den Wahrheitswert von $\mathcal{E}$ kennen. $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ ist ebenfalls wahr jedoch $\mathcal{A} \veebar \mathcal{B}$ ist falsch.

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\neg\mathcal{A}$	$\neg\mathcal{B}$	$\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$	$\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$	$\mathcal{A} \veebar \mathcal{B}$	$\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$	$\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$
w	w	f	f	w	w	f	w	w
w	f	f	w	f	w	w	f	f
f	w	w	f	f	w	w	w	f
f	f	w	w	f	f	f	w	w

De Morgan'sche Regeln

$$\neg(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \Leftrightarrow \neg\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{B}$$
$$\neg(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \Leftrightarrow \neg\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{B}$$

$$\underbrace{\neg(\neg\mathcal{A})}_{\text{doppelte Negation}} \Leftrightarrow \mathcal{A}$$

$$(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \Leftrightarrow \neg\mathcal{A} \vee \mathcal{B} \Leftrightarrow \neg(\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{B})$$

$$(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \Leftrightarrow \underbrace{(\neg\mathcal{B} \Rightarrow \neg\mathcal{A})}_{\text{Kontraposition}}$$

$$((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}) \Rightarrow (\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{C})$$

Aufgabe 1

Beweise mit Hilfe von Wahrheitstafeln (jeweils eine der 2 Formulierungen):

$$\mathcal{A} \wedge \mathcal{B} \Leftrightarrow \mathcal{B} \wedge \mathcal{A} \tag{1}$$
$$\mathcal{A} \vee \mathcal{B} \Leftrightarrow \mathcal{B} \vee \mathcal{A} \quad \text{Kommuntativität} \tag{2}$$
$$(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \wedge \mathcal{C} \Leftrightarrow \mathcal{A} \wedge (\mathcal{B} \wedge \mathcal{C}) \tag{3}$$
$$(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \vee \mathcal{C} \Leftrightarrow \mathcal{A} \vee (\mathcal{B} \vee \mathcal{C}) \quad \text{Assoziativität} \tag{4}$$
$$\mathcal{A} \wedge (\mathcal{B} \vee \mathcal{C}) \Leftrightarrow (\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \vee (\mathcal{A} \wedge \mathcal{C}) \tag{5}$$
$$\mathcal{A} \vee (\mathcal{B} \wedge \mathcal{C}) \Leftrightarrow (\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \wedge (\mathcal{A} \vee \mathcal{C}) \quad \text{Distributivität} \tag{6}$$

Aufgabe 2

Entscheide mit Hilfe von Wahrheitstafeln ob folgendes gilt:

$$(\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}) \Leftrightarrow ((\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \vee (\neg\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{B})) \tag{7}$$
$$(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \Leftrightarrow (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}) \tag{8}$$

Aufgabe 3

Ergänze die Sätze:

a) Die Aussage *„Heute regnet und donnert es* „ ist genau dann falsch, wenn es

b) Die Aussage *„Heute regnet oder schneit es* „ ist genau dann falsch, wenn es

c) Die Aussage *„Es regnet jeden Tag* „ ist genau dann falsch, wenn es

d) Die Aussage *„Diese Woche wird es einen Tag geben, an dem es regnet* „ ist genau dann falsch, wenn es

Sätze und Beweise

Für gewöhnlich hat ein mathematischer Satz die grobe Struktur

$$\mathcal{V} \Rightarrow \mathcal{F}$$

Dabei ist die Aussage $\mathcal{V}$ die Voraussetzung (Prämisse) und $\mathcal{F}$ die Folgerung. Es ist wichtig diese genau zu unterscheiden und es ist hilfreich die Voraussetzung deutlich aufzuführen.

Def. 5

Sei
$$\mathcal{V} \Rightarrow \mathcal{F}$$
ein Satz, so ist
$$\mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{V}$$
der zugehörige Kehrsatz (Umkehrsatz).

Beispiel 3.

„Es regnet, also ist die Straße nass“ bzw. *„Die Straße ist nass, also regnet es“*

Es ist offensichtlich, dass der Umkehrsatz nicht automatisch wahr ist, wenn der Satz wahr ist und umgekehrt. Ist dies der Fall so gilt: $\mathcal{V} \Leftrightarrow \mathcal{F}$

Quantoren

Viele mathematische Aussagen fangen mit „Für alle…“ (kurz: $\forall$) oder „Es gibt…“ (kurz: $\exists$) an.

Ist $\mathcal{P}(n)$ ein Prädikat und M eine Menge von Werten, die n annehmen kann, so kann man die folgenden Aussagen betrachten:

Beispiel 4.

$$\underbrace{\forall n \in M}_{\text{für alle } n \text{ aus } M} \underbrace{: \mathcal{P}(n)}_{\text{gilt} \mathcal{P}(n)}$$

Beispiel 5.

$$\underbrace{\exists n \in M}_{\text{es gibt (mindestens) ein } n \text{ aus } M} \underbrace{: \mathcal{P}(n)}_{\text{gilt} \mathcal{P}(n)}$$

(Gibt es genau ein Element, so schreibt man kurz: $\exists!$)

Sei M die leere Menge so gilt $\forall n \in M : \mathcal{P}(n)$ als wahr! Dies ist ungewöhnlich, da man im Alltag mit z.B. mit der Aussage „Alle meine Häuser sind aus Holz“ ebenfalls klar macht, dass man wohl mindestens ein (Holz-)Haus besitzt - streng logisch kann man das aber nicht schließen!

Beispiel 6.

Sie T die Menge der Töpfe und D die Menge der Deckel, so gilt umgangssprachlich:

$$\forall t \in T \exists d \in D : d \text{ passt auf } t$$

„Für jeden Topf gibt es einen Deckel, der zu dem Topf passt“

was nicht mit

$$\exists d \in D \forall t \in T : d \text{ passt auf } t$$

„Es gibt einen Deckel, der auf jeden Topf passt“ zu verwechseln ist.

Notwendig und hinreichend

Def. 6

Für die Aussage der Form $\forall n \in M : \mathcal{A}(n) \Rightarrow \mathcal{B}(n)$ verwendet man auch die Sprechweisen *„$\mathcal{A}(n)$ ist hinreichend für $\mathcal{B}(n)$“* bzw. *„$\mathcal{B}(n)$ ist notwendig für $\mathcal{A}(n)$.*

Beispiel 7.

$\mathcal{A}(n)$ Die Dezimaldarstellung von n endet mit einer Null

$\mathcal{B}(n)$ n ist gerade

$\mathcal{A}(n)$ ist hinreichend für $\mathcal{B}(n)$ und $\mathcal{B}(n)$ ist notwendig für $\mathcal{A}(n)$, denn endet n auf Null, so ist es notwendigerweise gerade! $\mathcal{B}(n)$ ist jedoch nicht hinreichend für $\mathcal{B}(n)$, da eine gerade Zahl nicht auf Null enden muss.

Beweise

Eine „für alle“-Aussage kann durch ein Gegenbeispiel widerlegt werden, eine „es gibt“-Aussage muss mit einer „für alle“-Aussage widerlegt werden.

Möchte man eine Aussage der Form $\mathcal{V} \Rightarrow \mathcal{F}$ beweisen, so gibt es folgende Techniken:

direkter Beweis In „kleinen“ Schritten direkt zum Ziel $\mathcal{V} \Rightarrow \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B} \Rightarrow \cdots \Rightarrow \mathcal{F}$

Beispiel 8.

Zu zeigen:

$$\forall n \in \mathbb{Z} : \text{ n gerade } \Rightarrow n^2 \text{ gerade}$$

Beweis: Voraussetzung: $n = 2 \cdot m$ mit $(m \in \mathbb{Z})$

Durch Umformen (Teilschritte) wollen wir zeigen, dass sich n^2 als $2 \cdot k$ mit $k \in \mathbb{Z}$ schreiben lässt

$$\begin{aligned} n^2 &= (2m)^2 \\ &= 4m^2 \\ &= 2(2m^2) \\ &= 2 \cdot k \end{aligned}$$

□

indirekter Beweis man beweist $\neg\mathcal{F} \Rightarrow \neg\mathcal{V}$ was äquivalent zu $\mathcal{V} \Rightarrow \mathcal{F}$ ist (Kontraposition)

Beispiel 9.

Zu zeigen:

$$\forall n \in \mathbb{Z} : n^2 \text{ gerade } \Rightarrow n \text{ gerade}$$

Beweis: Voraussetzung: 2 teilt n^2

Das Gegenteil der Folgerung ist „2 teilt nicht n, damit ist n ungerade und hat die Form $n = 2m+1$ also folgt $n^2 = (2m+1)^2 = 4m^2+4m+1$ dies ist jedoch ungerade da $4m^2 + 4m + 1 = 2(2n^2 + 2n) + 1 = 2k + 1$was das Gegenteil der Voraussetzung ist. □

Insbesondere führen die beiden vorhergehenden Beispiele zu:

$$\forall n \in \mathbb{Z} : \; n \textit{ gerade } \Leftrightarrow n^2 \textit{ gerade}$$

da gilt:

$$(\mathcal{V} \Rightarrow \mathcal{F} \wedge \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{V}) \Leftrightarrow (\mathcal{V} \Leftrightarrow \mathcal{F})$$

Beweis durch Widerspruch Grundlage ist:

$\mathcal{V}$	$\mathcal{F} \wedge \neg\mathcal{F}$	$\neg\mathcal{V} \Rightarrow \mathcal{F} \wedge \neg\mathcal{F}$
w	f	w
f	f	f

Man zeigt also $\mathcal{A}$, indem man das Gegenteil annimmt und zeigt, dass daraus einen Widerspruch entsteht. Da Widersprüche nie wahr sind, muss die (gegenteilige) Annahme ergo falsch sein.

Beispiel 10

Zu zeigen: Es existiert keine rationale Zahl mit $x^2 = 2$

Beweis: Angenommen es existiert solch eine Zahl, dann existieren ganze Zahlen m und n mit $x = \frac{m}{n}$, so dass n und m teilerfremd sind. Also gilt

$$\Rightarrow 2 = x^2 = \frac{m^2}{n^2}$$
$$\Rightarrow 2n^2 = m^2$$

Somit ist m^2 gerade, also auch m und es es existiert ein $k \in \mathbb{Z}$, sodass $m = 2k$

$$\Rightarrow 2n^2 = m^2 4k^2$$
$$\Rightarrow n^2 = 2k^2$$

Damit ist auch n^2 gerade, also auch n und m und n sind NICHT teilerfremd - Widerspruch! $\square$

Fallunterscheidung Gerade wenn Beträge in Aussagen auftauchen, muss man jeden erdenklichen Fall unterscheiden und einzeln beweisen.

Beispiel 11

Dreiecksungleichung: Seien a,$b \in \mathbb{R}$

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

1. Fall $a \geq 0$ und $b \geq 0$

2. Fall $a < 0$ und $b < 0$

3. Fall eine Variable positiv und die andere negativ

3.a $a + b \geq 0$

3.b $a + b < 0$

Vollständige Induktion

Das Beweisverfahren der vollständigen Induktion basiert auf der Rekursion, man führt das Problem auf ein „kleineres“ Problem zurück bis man das Problem beweisen kann. Oft vergleicht man es mit dem Dominoeffekt, man muss wissen, dass jeder Stein den nächsten Stein umwirft und man muss den ersten Stein umwerfen.

Induktionsprinzip

Sei $\mathcal{A}(n)$ eine Aussage über natürliche Zahlen n. Wenn gilt:

Induktionsanfang (IA) Es gilt $\mathcal{A}(1)$

Induktionsschritt (IS) $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\text{Aus } \mathcal{A}(n) \text{ folgt } \mathcal{A}(n+1)$$

Dann gilt $\mathcal{A}(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$

Beispiel 12

Gaußsche Summenformel: $\forall n \in \mathbb{N}$

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Beweis: *Induktionsanfang*: $1 = \frac{1(1+1}{2}$✓

Induktionsvoraussetzung (IV):
für n beliebig gilt $1 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Induktionsbehauptung:
$1 + \cdots + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

Induktionsschluss:
Man verwendet IV und formt um

$$\begin{aligned} 1 + \cdots + (n+1) &= 1 + \cdots + n + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+2)(n+1)}{2} \end{aligned}$$

$\square$

Aufgabe 4

Beweise mit Hilfe der vollständigen Induktion

a) $n^2 + n$ ist gerade

b) $4n^3 + 2n$ ist durch 3 teilbar

c) $2^{3n} + 13$ ist durch 7 teilbar

Aufgabe 5

Beweise mit Hilfe der vollständigen Induktion

a) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

b) $1 + 3 + \cdots + (2n-1) = n^2$

c) $1 + 2 + 4 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$

Aufgabe 6

Beweise mit Hilfe der vollständigen Induktion

a) $n^2 - 2n - 1 > 0$ für $n \geq 3$

b) $2^n > n + 1$ für $n \geq 2$

c) $2^n > n^2$ für $n \geq 5$

p.gohn@htg-loe.de