Mathe Abi '18

DAS SCHÜLERSKRIPT

Das Vermächtnis der letzten Maple-Klasse des Hans-Thoma-Gymnasium aus Lörrach

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen

1.1 Zahlenmenge

Natürliche Zahlen $\mathbb{N}$

$$\mathbb{N} = \{0,1,2,3,\dots\}$$

In manchen Fachbüchern zählt man die Null nicht dazu!

Ganze Zahlen $\mathbb{Z}$

$$\mathbb{Z} = \{\dots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\dots\}$$

Rationale Zahlen $\mathbb{Q}$ („Bruchzahlen“)

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \text{ mit } a \in \mathbb{Z} \text{ und } b \in \mathbb{Z}\backslash\{0\} \right\}$$

Die rationalen Zahlen lassen sich immer als Bruch, als abbrechende oder als periodische Dezimalzahlen schreiben.

Irrationale Zahlen $\mathbb{I}$

Nicht jede Zahl ist rational, so lassen sich zum Beispiel $\sqrt{2}$ oder π nicht als periodische oder abbrechende Dezimalzahl schreiben; solche Zahlen nennt man irrational.

Reelle Zahlen $\mathbb{R}$

Die Menge der reellen Zahlen enthält die rationalen Zahlen und die irrationalen Zahlen.

Allgemein gilt:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

1.2 Bruchrechnen

Definition

$$\frac{\text{Zähler}}{\text{Nenner}}$$

Kürzen und Erweitern

Man erweitert bzw. kürzt einen Bruch, indem man sowohl Zähler als auch Nenner dieses Bruches mit der gleichen Zahl multipliziert bzw. durch diese dividiert.

Beispiel

Erweitern (mit 3):

$$\frac{5}{2} = \frac{15}{6}$$

Beispiel

Kürzen (mit 3):

$$\frac{21}{9} = \frac{7}{3}$$

Addition

Um zwei Brüche zu addieren, muss man sie auf denselben Nenner bringen und die beiden Zähler addieren.

Regel

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$$
$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} + \frac{c \cdot b}{d \cdot b} = \frac{a \cdot d + c \cdot b}{b \cdot d}$$

Beispiel

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$
$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{4}{12}+\frac{3}{12}=\frac{7}{12}$$

Subtraktion

Um zwei Brüche zu subtrahieren, muss man sie auf denselben Nenner bringen und die beiden Zähler subtrahieren.

Regel

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{b}=\frac{a-c}{b}$$
$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot d}-\frac{c\cdot b}{d\cdot b}=\frac{a\cdot d-c\cdot b}{b\cdot d}$$

Beispiel

$$\frac{5}{6}-\frac{3}{6}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$
$$\frac{5}{6}-\frac{4}{5}=\frac{25}{30}-\frac{24}{30}=\frac{1}{30}$$

Multiplikation

Um zwei Brüche miteinander zu multiplizieren, multipliziert man jeweils die beiden Zähler und die beiden Nenner.

Regel

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$$

Beispiel

$$\frac{4}{3}\cdot\frac{7}{5}=\frac{4\cdot 7}{3\cdot 5}=\frac{28}{15}$$

Division

Um zwei Brüche zu dividieren, multipliziert man mit dem Kehrbruch.

Regel

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$$

Beispiel

$$\frac{5}{3}:\frac{10}{6}=\frac{5\cdot 6}{3\cdot 10}=\frac{30}{30}=1$$

1.3 Rechengesetze

Punkt vor Strich

Regel

$$a+b\cdot c=a+(b\cdot c)$$

Kommutativgesetz

Summanden und Faktoren können beliebig vertauscht werden.

Regel

$$a+b=b+a$$
$$a\cdot b=b\cdot a$$

Assoziativgesetz

Bei Summe und Produkt können beliebig Klammern gesetzt werden.

Regel

$$a+(b+c)=(a+b)+c$$
$$a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$$

Distributivgesetz

Regel

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Vorzeichen

Regel

$$\begin{aligned} \text{-}(\text{-}a) &= a \\ (\text{-}a) \cdot (\text{-}b) &= a \cdot b \\ a - b &= \text{-}(b - a) \\ (a - b) - c &= a - (b + c) \end{aligned}$$

1.4 Fakultät

Als Fakultät einer Zahl n bezeichnet man das Produkt aller natürlichen Zahlen (ohne Null) kleiner und gleich dieser Zahl n.

Definition

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1$$

Beispiel

$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

1.5 Summen

Definition

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

„Summe über a_k von $k = 1$ bis $k = n$"

- k heißt Laufvariable
- 1 heißt Startwert oder untere Grenze
- n heißt Endwert oder obere Grenze
- a_k ist die Funktion bezüglich der Laufvariable

Beispiel

$$\sum_{k=1}^{5} k^2$$

- Laufvariable: k
- Startwert: 1
- Endwert: 5
- Funktion: $a(k) = k^2$
- k kann folgende Werte annehmen:
  $\rightarrow k = 1$ (Startwert)
  $\rightarrow k = 2$
  $\rightarrow k = 3$
  $\rightarrow k = 4$
  $\rightarrow k = 5$ (Endwert)

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{5} k^2 &= 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 \\ &= 1 + 4 + 9 + 16 + 25 \\ &= 55 \end{aligned}$$

1.6 Potenzen

Allgemein

Natürliche Exponenten:

Regel

Für $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{\text{n-mal}}$$

Beispiel

$$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$$

Negative Exponenten:

Regel

Für $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \frac{1}{\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n\text{-mal}}}$$

Beispiel

$$10^{-5} = \frac{1}{10^5} = \frac{1}{100000}$$

Rationale Exponenten:

Regel

Für $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{Q}$ gilt:

$$a^n = a^{\frac{l}{m}} = \sqrt[m]{a^l}$$

Beispiel

$$4^{\frac{5}{2}} = \sqrt[2]{4^5} = \sqrt[6]{1024} = 32$$

Potenzgesetze

Wichtig

$$a^1 = a$$
$$a^0 = 1$$

Man addiert/subtrahiert Potenzen mit gleicher Basis und gleichem Exponenten, indem man die Vorfaktoren addiert/subtrahiert.

Regel

$$r \cdot a^n + s \cdot a^n = (r+s) \cdot a^n$$
$$r \cdot a^n - s \cdot a^n = (r-s) \cdot a^n$$

Beispiel

$$3 \cdot 6^7 + 4 \cdot 6^7 = 7 \cdot 6^7$$

Man multipliziert/dividiert Potenzen mit gleicher Basis, indem man die Exponenten addiert/subtrahiert.

Regel

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$
$$a^n : a^m = a^{n-m}$$

Beispiel

$$7^2 \cdot 7^3 = 7^{2+3} = 7^5$$
$$7^5 : 7^3 = 7^{5-3} = 7^2$$

Man multipliziert/dividiert Potenzen mit gleichem Exponenten, indem man die Basen multipliziert/dividiert.

Regel

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$
$$a^n : b^n = (a : b)^n$$

Beispiel

$$4^3 \cdot 25^3 = (4 \cdot 25)^3 = 100^3$$
$$100^3 : 25^3 = (100 : 25)^3 = 4^3$$

Man potenziert Potenzen, indem man die Exponenten multipliziert.

Regel

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

Wichtig

$$(a^m)^n \neq a^{(m^n)}$$
$$(5^3)^2 = 5^{3 \cdot 2} = 5^6 \neq 5^{(3^2)} = 5^9$$

1.7 Logarithmen

Definition

Für $b^x = y$ gilt:

$$\log_b(y) = x$$

Somit folgt:

$$b^{\log_b(x)} = x$$
$$\log_b(b^x) = x$$

$$\log_b(y) = x$$

Logarithmus

Numerus

Basis

Regel

$$\log_b(u \cdot v) = \log_b(u) + \log_b(v)$$
$$\log_b(u : v) = \log_b(u) - \log_b(v)$$
$$\log_b(u^r) = r \cdot \log_b(u)$$
$$\frac{\log a}{\log b} = \log_a(b)$$

Beispiel

Gesucht: Numerus

$$\log_2(y) = 5$$
$$2^5 = y$$
$$32 = y$$

Gesucht: Logarithmus

$$\log_2(32) = x \to \text{Taschenrechner}$$

Gesucht: Basis

$$\log_b(32) = 5$$
$$b^5 = 32 \quad |\sqrt[5]{}$$
$$b = 2$$

2 Gleichungen

2.1 Variablen aus dem Nenner ausmultiplizieren

Variablen aus dem Nenner ausmultiplizerien um das weitere Vorgehen zu erleichtern.

Beispiel

$$\begin{aligned} 4x &= \frac{12}{3x} && \mid \cdot 3x \\ 12x^2 &= 12 && \mid : 12 \\ x^2 &= 1 && \mid \sqrt{} \\ |x| &= 1 \\ \mathbb{L} &= \{\text{-}1; 1\} \end{aligned}$$

Da das Quadrat einer negativen Zahl positiv ist, gibt es, nach ziehen der Quadratwurzel, zwei Lösungen.

2.2 Ausmultiplizieren

x muss mit beiden Summanden multipliziert werden.

Beispiel

$$\begin{aligned} x(x-2) - 1 &= 0 \\ x^2 - 2x - 1 &= 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ *pq*-Formel
(siehe Abschnitt 2.5.1)

2.3 Ausklammern

Liegt x in beiden Summanden vor, so kann man ausklammern.

Wichtig
Nicht durch x teilen, x könnte 0 sein!

Beispiel

$$\begin{aligned} x^3 &= 4x && \mid -4x \\ x^3 - 4x &= 0 \\ x \cdot (x^2 - 4) &= 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Satz des Nullprodukts (siehe 2.4)

2.4 Satz des Nullprodukts

Regel
Ein Produkt kann nur 0 ergeben, wenn mindestens einer der beiden Faktoren 0 ist. Eine Gleichung dieser Form kann man also lösen, indem man beide Faktoren 0 setzt.

Beispiel

$$\begin{aligned} x(x^2 - 4) &= 0 && \Rightarrow x_1 = 0 \\ x^2 - 4 &= 0 && \mid +4 \\ x^2 &= 4 && \mid \sqrt{} \\ |x| &= 2 \\ x_2 &= \text{-}2 && x_3 = 2 \\ \mathbb{L} &= \{\text{-}2; 0; 2\} \end{aligned}$$

2.5 pq-Formel und abc-Formel

2.5.1 pq-Formel

Um die Nullstellen einer Gleichung der Form $x^2 + px + q = 0$ zu berechnen, kann man die pq-Formel verwenden.

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Hierbei ist der Term unter der Wurzel die Diskriminante D

$$D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$$

Es gilt:

$$D > 0 \rightarrow 2 \text{ Lösungen}$$
$$D = 0 \rightarrow 1 \text{ Lösung}$$
$$D < 0 \rightarrow \text{keine Lösung}$$

Beispiel

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$
$$p = 2 \qquad q = -3$$
$$x_{1,2} = \text{-}\frac{2}{2} \pm \sqrt{\frac{2^2}{4} + 3}$$
$$x_1 = \text{-}1 + 2 = 1$$
$$x_2 = \text{-}1 - 2 = \text{-}3$$
$$\mathbb{L} = \{\text{-}3; 1\}$$

2.5.2 abc-Formel

Um die Nullstellen einer Gleichung der Form $ax^2 + bx + c = 0$ zu berechnen, kann man die abc-Formel verwenden.

$$x_{1,2} = \frac{\text{-}b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Hierbei ist der Term unter der Wurzel die Diskriminante D

$$D = b^2 - 4ac$$

Es gilt:

$$D > 0 \rightarrow 2 \text{ Lösungen}$$
$$D = 0 \rightarrow 1 \text{ Lösung}$$
$$D < 0 \rightarrow \text{keine Lösung}$$

Beispiel

$$x^2 + 6x - 8 = 0$$
$$x_{1,2} = \frac{\text{-}6 \pm \sqrt{6^2 + 4 \cdot 2 \cdot 8}}{2 \cdot 2}$$
$$x_{1,2} = \frac{\text{-}6 \pm \sqrt{100}}{2 \cdot 2}$$
$$x_1 = \frac{\text{-}6 + 10}{4} = 1$$
$$x_2 = \frac{\text{-}6 - 10}{4} = \text{-}4$$
$$\mathbb{L} = \{\text{-}4; 1\}$$

2.5.3 Satz von Vieta

Es besteht ein Zusammenhang zwischen den Parametern p, q und den Lösungen $x_{1,2}$, wenn eine Gleichung in der Form $x^2 + px + q = 0$ vorliegt.

$$-p = x_1 + x_2$$
$$q = x_1 \cdot x_2$$

Beispiel

$$x^2 - 5x = 0$$
$$\text{-}(\text{-}5) = 5 = x_1 + x_2$$
$$6 = x_1 \cdot x_2$$

Also gilt $x_1 = 2$ und $x_2 = 3$

2.6 Natürlicher Logarithmus

Regel

$\log_e(3) = x$ oder $\ln(3) = x$

Der natürliche Logarithmus ist der Logarithmus zur Basis $e = 2{,}71\ldots$.

Beispiel

$$\begin{aligned} e^{3x} &= 2 && |\ln(\ldots) \\ 3x &= \ln(2) && |:3 \\ x &= \frac{\ln(2)}{3} \end{aligned}$$

2.7 Substitution

Durch Substitution kann man komplizierte Funktionen in einfachere Standardfunktionen umwandeln, um so den Rechenweg zu verkürzen.

Vorgehensweise:

1. Bestimmung des zu ersetzenden Terms/Variable
2. Ersetzen jedes Terms durch die neue Variable
3. Berechnung der Nullstellen mit den vorhandenen Möglichkeiten (pq-Formel [2.5.1], S.d.Np. [2.4])
4. Rücksubstitution

Beispiel

$$\begin{aligned} x^4 + 2 \cdot x^2 - 1 &= 0 && u := x^2 \\ u^2 + 2 \cdot u - 1 &= 0 \end{aligned}$$

in pq-Formel einsetzen:

$$\begin{aligned} u_{1,2} &= -\frac{2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2 + 1} \\ &= -1 \pm 2 \\ u_1 &= 1 \qquad\qquad u_2 = -3 \end{aligned}$$

Vorgehensweise Rücksubstitution:

1. berechnete Nullstellen mit dem ersetzten Term gleichsetzen
2. nach der „alten" Variable Umstellen

Beispiel

$$\begin{aligned} u_1 = 1 &= x^2 && |\sqrt{} \\ x_{1;2} &= \pm 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_2 = -3 &= x^2 && |\sqrt{} \\ \pm\sqrt{-3} &= x && \text{keine Lösung} \end{aligned}$$

Somit ist also $\mathbb{L} = \{-1; 1\}$

Wichtig

- „alte"Variable sollte im neuen Ausdruck nicht mehr vorkommen
- Substitution nur möglich wenn Exponenten gerade → sonst ausklammern

2.8 Binomische Formeln

Regel

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \tag{2.1}$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \tag{2.2}$$
$$(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2 \tag{2.3}$$

2.9 Trigonometrischen Gleichungen

Im Wahlteil ist es zu empfehlen trigonometrische Gleichungen von dem jeweiligen Hilfsmittel lösen zu lassen (*Stichwort: solve bzw. alles auf eine Seite bringen und die Nullstellen dieser „Funktion“ ermitteln*)

Für den Pflichtteil sollte man wenigstens folgende Werte auswendig kennen:

α	x	$\sin(x)$
0°	0	0
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1
180°	π	0
270°	$\frac{3\pi}{2}$	-1

α	x	$\cos(x)$
0°	0	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	0
180°	π	-1
270°	$\frac{3\pi}{2}$	0

Einfache Gleichungen lassen sich bereits mit diesem Wissen direkt lösen, man muss nur darauf achten, dass es i.d.R. unendlich viele Lösungen gibt.

Beispiel

Die Gleichunge $\sin(x) = \frac{1}{2}$ hat also die Lösung $x = \frac{\pi}{6}$, jedoch auch auch jeden Wert der dazu um die Periode, hier 2π verschoben ist.

$\mathbb{L} = \{\frac{\pi}{6} + n \cdot 2\pi | n \in \mathbb{Z}\}$

Sehen die Gleichungen komplizierter aus, so sollte man immer an den Satz des Nullproduktes oder an Substitution denken um eine einfach Gleichung her zu leiten, welche man mit der Tabelle lösen kann.

3 Funktionen

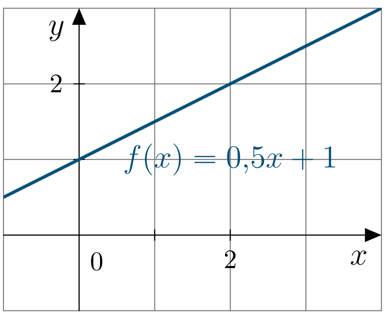
Definition
Eine Funktion f ordnet jedem Element x einer Definitionsmenge $\mathbb{D}$ genau ein Element y einer Wertemenge $\mathbb{W}$ zu.

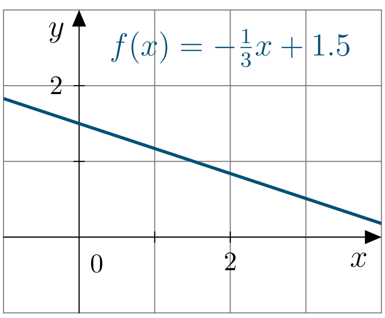
3.1 Lineare Funktionen

Definition
Eine Funktion f der Form $f(x) = mx + c$ heißt lineare Funktion und ihren Graphen nennt man eine Gerade

- c: Verschieben entlang der y-Achse
- m: Steigung (Steigung pro LE)

Beispiel

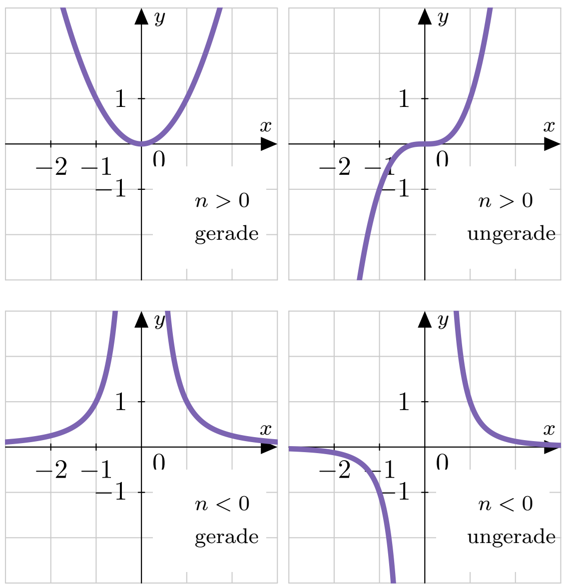




3.2 Potenzfunktionen

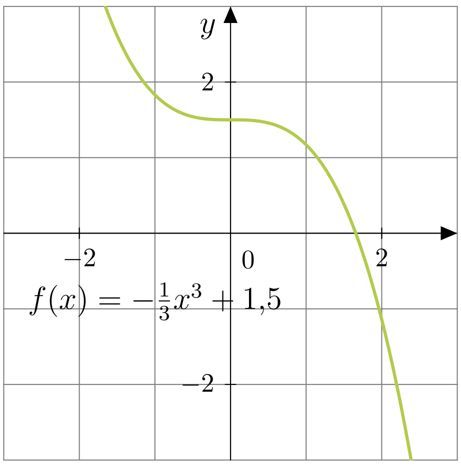
Definition
Eine Funktion f der Form
$f(x) = a(x-b)^n + c$ heißt Potenzfunktion.

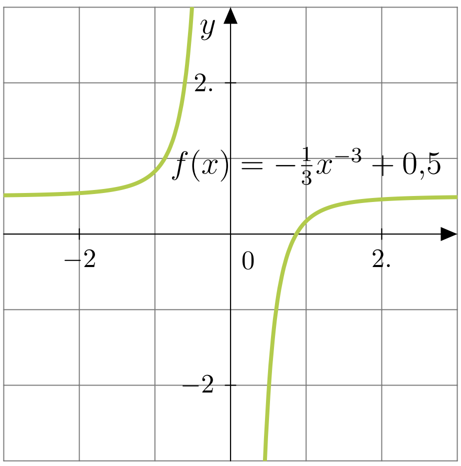
- n: Generelles Erscheinungsbild
- a: Strecken bzw. Stauchen der Funktion
  - Strecken für $|a| > 1$
  - Stauchen für $|a| < 0$
- b: Verschieben entlang x-Achse
  - nach Links für $b > 0$
  - nach Rechts für $b < 0$
- c: Verschieben entlang der y-Achse



Wichtig
$(x-b)^n$: nach Rechts verschieben
$(x+b)^n$: nach Links verschieben

Beispiel





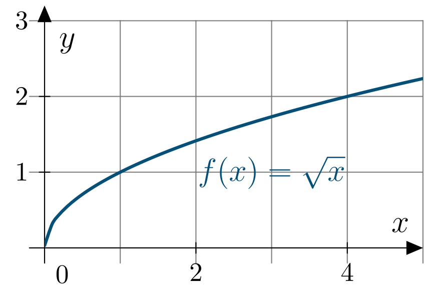
3.3 Wurzelfunktion

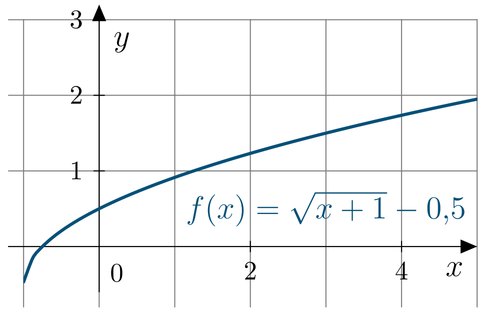
Definition

Eine Funktion f der Form $f(x) = \sqrt[n]{x-b}+c$ $= (x-b)^{\frac{1}{n}} + c$ heißt Wurzelfunktion.

- Strecken für $n > 1$
- Stauchen für $0 < n < 1$
- b: Verschiebung entlang der x-Achse
- c: Verschiebung entlang der y-Achse

Beispiel





3.4 Trigonometrische Funktionen

Definition

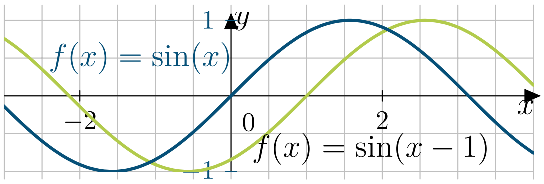
Eine Funktion f der Form
$f(x) = a \cdot \sin(b(x-c)) + d$
bzw. $g(x) = a \cdot \cos(b(x-c)) + d$
heißt Sinus- bzw. Kosinusfunktion.

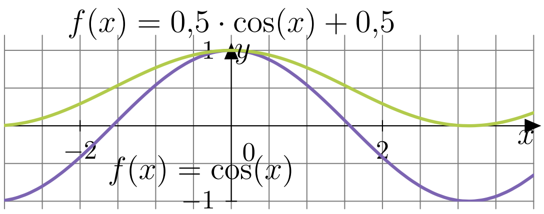
- a: Amplitude (Strecken/Stauchen an der y-Achse)
- $b = \frac{2\pi}{p} \to p$: Periodendauer (Strecken/-Stauchen an der x-Achse)
- c: Verschieben entlang der x-Achse
- d: Verschieben entlang der y-Achse

Wichtig

$\sin(x-c)$: nach Rechts verschieben
$\sin(x+c)$: nach Links verschieben

Beispiel





3.5 gebrochen rationale Funktionen

Unter einer gebrochen rationalen Funktion versteht man den Quotienten zweier ganzrationaler Funktionen (Polynome). Dabei setzt sich der Funktionsterm aus dem Zählerpolynom vom Grad z und dem Nennerpolynom vom Grad n zusammen.

$$f(x) = \frac{Z(x)}{N(x)}$$

Ist x_N eine Nullstelle des Zählerpolynoms, so heißt sie Nullstelle der Funktion, falls sie zum Definitionsbereich gehört.

Gilt $Z(x_N) \neq 0$ und $N(x_N) = 0$, so ist x_N eine Definitionslücke und darf in der Definitionsmenge nicht enthalten sein. x_N ist eine sogenannte Polstelle von f und die Gerade mit $x = x_N$ ist eine senkrechte Asymptote[1].

[1] Nähert sich ein Graph einer Geraden an, ohne dass sich beide je im Verlauf berühren, so ist die Gerade eine Asymptote des Graphen. Eine Asymptote einer solchen Kurve ist eine Gerade, der sich die Kurve „im Unendlichen beliebig annähert“

Beispiel

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - 5x - 6}{x^5 - 6x^3 + 2x^2 + 9x - 6} = \frac{(x+1)(x-2)(x+3)}{(x-1)^2(x+2)(x^2+3)}$$

Dabei ist $z = 3$ und $n = 5$. $x_1 =$ -1, $x_2 = 2$ und $x_3 =$ -3 sind Nullstellen der Funktion f und der Definitionsbereich wäre $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}\backslash\{\text{-}2; 1\}$ („$\mathbb{R}$ ohne -2 und 1“), die Funktion hat also an den Stellen $x =$ -2 und $x = 1$ Definitionslücken. Insbesondere nennt man 1 eine doppelte Nullstelle des Nennerpolynom, da sie in der Zerlegung doppelt vorkommt.

Regel

Sei x_N eine Nullstelle des Nennerpolynoms einer gebrochen rationalen Funktion und $n_0 \geq 1$ bzw. $z_0 \geq 0$ die zugehörige Vielfachheiten im Nenner- bzw. Zählerpolynom so gilt, falls die $n_0 - z_0$

gerade ist, dass eine Polstelle ohne Vorzeichenwechsel vorliegt

ungerade ist, dass eine Polstelle mit Vorzeichenwechsel vorliegt

≤0 ist, dass die Definitionslücke „hebbar“ ist und es keine Polstelle vorliegt, insbesondere gibt es keine senkrechte Asymptote an dieser Stelle x_N

Sei $f(x)$ eine gebrochen rationale Funktion wie in der Definition, so ist das Verhalten für $x \to \pm\infty$ gegeben durch

z<n $f(x) \to 0$; x-Achse ist waagerechte Asymptote

z=n $f(x) \to c$; die Gerade mit $y = c$ ist waagerechte Asymptote und c der Quotient der Koeffizienten der jeweils höchsten Potenz von x im Zähler und Nenner

z>n keine waagerechte Asymptote, ist $z - n = 1$ so kann mit Hilfe der Polynomdivision eine schiefe Asymptote bestimmt werden

Beispiel
Der Graph von $f(x) = \frac{4x^2}{3x^5-x^3+6}$ ist asymptotisch zur x-Achse da 2<5.

Der Graph von $g(x) = \frac{3x^3-x}{5x^2+7}$ besitzt hingegen die Asymptote $y = \frac{3}{5}$.

Keine waagerechte Asymptote besitzt der Graph von $h(x) = \frac{5x^4+x^3-x^2+5}{x^3+6x^2-4}$, da 4>3.

3.6 Spiegeln

Um Funktionsgraphen zu spiegeln erinnert man sich an die Bedingungen für die zugehörigen Symmetrien.

Spiegelung an der x-Achse

Man multipliziert den Funktionswert mit -1, der zur Funktion f gespiegelte Term ist also $g(x) = -f(x)$.

Beispiel
Spiegelt man den Graphen von $f(x) = 5x^2 - 2x + 3$ an der x-Achse, so lässt die der gespiegelte Graph durch $g(x) = -5x^2 + 2x - 3$ beschreiben.

Spiegelung an der y-Achse

Man multipliziert das Argument x mit -1, der zur Funktion f gespiegelte Term ist also $g(x) = f(-x)$.

Beispiel
Spiegelt man den Graphen von $f(x) = 5x^2 - 2x + 3$ an der y-Achse, so lässt die der gespiegelte Graph durch $g(x) = 5(-x)^2 + 2(-x) + 3 = 5x^2 - 2x + 3$ beschreiben.

Spiegelung am Ursprung

Kombiniert man eine Spiegelung an der x-Achse und eine an der y-Achse, so erhält man eine Punktspiegelung am Ursprung. Also $g(x) = -f(-x)$

Beispiel
Spiegelt man den Graphen von $f(x) = 5x^2 - 2x + 3$ am Ursprung, so lässt die der gespiegelte Graph durch $g(x) = -5(-x)^2 - 2(-x) - 3 = -5x^2 + 2x - 3$ beschreiben.

3.7 Funktionsscharen

Definition
Enthält eine Funktionsgleichung neben einer Gleichungsvariablen eine Formvariable, so spricht man von einer Funktionsschar.

Beispiel

$$f_a(x) = x^2 + a$$

Die Ableitung erfolgt nach der Gleichungsvariablen

$$f_a'(x) = 2x$$

Je nachdem, wie die Formvariable im Term auftaucht, haben die Graphen unterschiedliche gemeinsame Eigenschaften. In unserem Beispiel hätten die Graphen an jedem Punkt die gleiche Steigung, jedoch unterschiedliche Nullstellen.

3.7.1 Ortskurve

Liegt ein Punkt(z.B. Hoch- Tief- Wendepunkt) in Abhängigkeit einer Variablen vor, so liegen alle Punkte auf der sogenannten Ortskurve. Diese ermittelt man indem man zuerst die allgemeine Angabe der x-Koordinate nach der Formvariable umstellt. Dies setzt man nun in die allgemeine y-Koordinate ein und erhält so die Gleichung der Ortskurve.

Beispiel

Der Punkt sei $P_t(2t|\text{-}4t^3)$, die x-Koordinate beträgt also $x = 2t$, somit ist also $t = \frac{x}{2}$. Die y-Koordinate ist $y = \text{-}4t^3$, was mit $t = \frac{x}{2}$ zu:

$$y = \text{-}4 \cdot (\frac{x}{2})^3$$

$$y = \text{-}4 \cdot \frac{x^3}{8}$$

Die Gleichung der Ortskurve lautet also: $y = \text{-}\frac{1}{2} \cdot x^3$.

4 Differential- und Integralrechnung

Definition

Sei f eine Funktion, so nennt man die Funktion f' *die erste Ableitung der Funktion* f, falls f' an jeder Stelle x_0 die Steigung der Tangente im Punkt $(x_0|f(x_0))$ angibt.

4.1 Ableitungsregeln

Wichtig

$f(x)$	x^r	e^x	$\sin(x)$	$\cos(x)$
$f'(x)$	$r \cdot x^{r-1}$	e^x	$\cos(x)$	$-\sin(x)$

	Faktorregel	Summenregel
$f(x)$	$c \cdot g(x)$	$g(x) \pm h(x)$
$f'(x)$	$c \cdot g'(x)$	$g'(x) \pm h'(x)$

4.1.1 Kettenregel

Definition

$$\mathrm{f(x)} = \mathrm{g(h(x))}$$

innere Funktion

äussere Funktion

Beispiel

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \sin(2x^2) \\ g(x) &= \sin(x) \\ h(x) &= 2x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_2(x) &= e^{3x+5} \\ g(x) &= e^x \\ h(x) &= 3x+5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_3(x) &= \left(x+\sqrt{x}\right)^3 \\ g(x) &= x^3 \\ h(x) &= x+\sqrt{x} \end{aligned}$$

Wichtig

Sei $f(x) = g(h(x))$,
so ist $f'(x) = h'(x) \cdot g'(h(x))$

Beispiel

$$\begin{aligned} f_1'(x) &= 4x \cdot \cos\left(2x^2\right) \\ f_2'(x) &= 3e^{3x+5} \\ f_3'(x) &= \left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) \cdot 3\left(x+\sqrt{x}\right)^2 \end{aligned}$$

4.1.2 Produktregel

Wichtig

Sei $f(x) = u(x) \cdot v(x)$, so ist
$$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

Beispiel

$$\begin{aligned} f(x) &= (5x^3-2x) \cdot (2x) \\ u(x) &= 5x^3 - 2x \\ u'(x) &= 15x^2 - 2 \\ v(x) &= 2x \\ v'(x) &= 2 \\ f'(x) &= u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) \\ f'(x) &= (15x^2-2)2x + 2 \cdot (5x^3-2x) \end{aligned}$$

4.1.3 Quotientenregel

(Nicht notwendig im Abitur, manchmal jedoch hilfreich)

$$\text{Sei } f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \text{ , so ist}$$
$$f(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - v'(x) \cdot u(x)}{v^2(x)}$$

Beispiel

$$f(x) = \frac{2x^2+3}{8x+1}$$
$$u(x) = 2x^2+3$$
$$u'(x) = 4x$$
$$v(x) = 8x+1$$
$$v'(x) = 8$$
$$f'(x) = u(x) \cdot v(x) - v'(x) \cdot u(x)v^(x)$$
$$f'(x) = \frac{4x(8x+1) - 8(2x^2+3)}{(8x+1)^2}$$

4.2 Integralrechnung

4.2.1 Stammfunktion

Sei f eine Funktion von x, so ist F eine Stammfunktion, wenn $F'(x) = f(x)$ gilt.

Beispiel

$$F_1(x) = 12x^3+5$$
$$F_2(x) = 12x^3+9$$
$$f(x) = 36x^2$$

Beides sind Stammfunktionen von f

Wichtig

$f(x)$	$F(x)$
a	$a \cdot x + c$
x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$
$\frac{1}{x}$	$\ln(\lvert x \rvert) + c$
$\ln(x)$	$x \cdot \ln(x) - x + c$
$\sin(x)$	$-\cos(x) + c$
$\cos(x)$	$\sin(x) + c$
e^x	$e^x + c$

4.2.2 Integrale

Sei F eine Stammfunktion der Funktion f, so ist das Integral von f zwischen den Grenzen a und b ist definiert als:

Definition

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Es gibt also unendlich viele Stammfunktionen da die sogenannte Integrationskonstante beim ableiten *verschwindet*.

Beispiel

$$\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$$

Wichtig

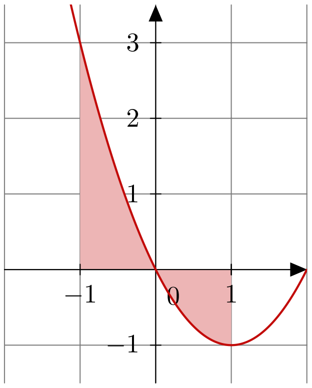
Der Flächeninhalt eine Fläche zwischen einem Funktionsgraphen und der x-Achse entspricht dem Betrag des Integrals.

Achtung: Auf die Orientierung der Flächen achten und notfalls unterteilen.

Beispiel

$f(x) = x^2 - 2x$ hat die Nullstellen $x_1 = 0$ und $x_2 = 2$. Die Fläche zwischen dem Graphen von f und der x-Achse im Intervall [-1;1] beträgt also:

$$
\begin{aligned}
A &= \left|\int_{-1}^{0} f(x)\,dx\right| + \left|\int_{1}^{0} f(x)\,dx\right| \\
&= \left|\left[\frac{1}{3}x^3 + x^2\right]_{-1}^{0}\right| + \left|\left[\frac{1}{3}x^3 + x^2\right]_{0}^{1}\right| \\
&= \left|0 - \left(-\frac{1}{3} + 1\right)\right| + \left|\frac{1}{3} + 1 - 0\right| \\
&= 2
\end{aligned}
$$



Für die Fläche zwischen den Graphen von f und g gilt:

$$A = \left|\int_{a}^{b} f(x) - g(x)\,dx\right|$$

Beispiel

Die Graphen von $f(x) = \text{-}x^2 + 1$ und $g(x) = x - 1$ schneiden sich an den Stellen $x_a = \text{-}2$ und $x_b = 1$

$$
\begin{aligned}
A &= \left|\int_{-2}^{1} \text{-}x^2 + 1 - (x-1)\,dx\right| \\
&= \left|\left[\text{-}\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x\right]\right| \\
&= \left|-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 - \left(\frac{8}{3} - 2 - 4\right)\right| = 4{,}5
\end{aligned}
$$

4.2.3 Rotationsvolumen

Rotiert das Schaubil einer Funktion f um die x-Achse und erezugt im Intervall $[a{,}b]$ dadurch eine Volumen, so gilt für den Volumeninhalt:

$$V = \pi \int\limits_{a}^{b} (f(x))^2\,dx$$

Beispiel

$f(x) = x + 1$ im Intervall $[0{,}2]$

$$
\begin{aligned}
V &= \pi \int\limits_{0}^{2} (x+1)^2\,dx \\
&= \pi \int\limits_{0}^{2} (x^2 + 2x + 1)\,dx \\
&= \pi \left[\frac{1}{3}x^3 + x^2 + x\right]_{0}^{2} dx \\
&= \frac{26}{3} \cdot \pi
\end{aligned}
$$

4.2.4 Uneigentliche Integrale

Wenn eine Funktion an mindestens einer Integralgrenze nicht definiert ist, nennt man dieses Integral ein „uneigentliches“ Integral. Für die Ermittlung des teilweise endlichen Flächeninhaltes führt man eine Betrachtung des Grenzwerts durch:

Beispiel

$$
\begin{aligned}
A(z) &= \int_{0}^{z} e^{-x}\,dx = e^{-z} + 1 \\
\lim_{z\to\infty} A(z) &= 0 + 1 = 1
\end{aligned}
$$

Somit strebt der Flächeninhalt gegen 1

4.2.5 Mittelwert einer Funktion

Definition

Der Mittelwert $\overline{m}$ einer Funktion f im Intervall $[a{,}b]$ ist definiert als

$$\overline{m} = \frac{1}{b-a} \int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx$$

Beispiel

Die Funktion $f(x) = 3x^2 + 2x$ hat im Intervall [-1,2] den Mittelwert

$$\begin{aligned}\overline{m} &= \frac{1}{2-(\text{-}1)}\int\limits_{\text{-}1}^{2} 3x^2+2x\,dx\\ &= \frac{1}{3}\left[x^3+x^2\right]_{\text{-}1}^{2}\\ &= \frac{1}{3}\left(8+4-(\text{-}1+(\text{-}1))\right)=\frac{14}{3}\end{aligned}$$

5 Kurven untersuchen

5.1 Definitionsbereich

Es wird die maximale Definitionsmenge $\mathbb{D}_f$ angegeben (meistens die Menge $\mathbb{R}$ aller reellen Zahlen). Es darf weder durch Null geteilt werden, noch eine negativen Zahl in einem Logarithmus oder unter einer Wurzel auftauchen.

Beispiel

$$f(x) = \frac{x \cdot (x-2)}{(x-2)} \quad \mathbb{D}_{\mho} \quad = \{x \in \mathbb{R} | x \neq 2\}$$

(bei x=2 würde man durch Null teilen)

5.2 Schnittpunkt mit Koordinatenachsen

5.2.1 Schnittpunkt mit y-Achse

Jeder Schnittpunkt mit der y-Achse hat die Eigenschaft, dass die x-Koordinate Null ist. Um den Punkt zu bestimmen muss man für x Null einsetzen.

Beispiel

$$\begin{aligned} f(x) &= 5x^2 - 2x + 5 \\ f(0) &= 5 \cdot 0^2 - 2 \cdot 0 + 5 \\ f(0) &= 5 \end{aligned}$$

5.2.2 Schnittpunkt mit der x-Achse/Nullstellen

Jede Nullstelle an der x-Achse hat die Eigenschaft, dass $y = 0$. Um die Nullstellen zu bestimmen, muss man die Funktionsgleichung gleich Null setzen.

Beispiel

$$\begin{aligned} f(x) &= 5 + 2 \\ 0 &= 5x + 2 \\ x &= \text{-0,4} \qquad\qquad \mathbb{L} = \{\text{-0,4}\} \end{aligned}$$

5.3 Extremstellen & Wendepunkte

5.3.1 Extremstellen

Die Steigung f' an den Extremstellen beträgt Null.

1. erste und zweite Ableitung bestimmen
2. erste Ableitung Null setzen und Lösungen x_i bestimmen
3. Lösungen x_i in $f(x)$ einsetzen $\rightarrow P_i(x_i|f(x_i))$
4. x_i in $f''(x)$ einsetzen und entscheiden ob HP oder TP

$$\begin{aligned} f''(x) > 0 &\rightarrow \text{Tiefpunkt} \\ f''(x) < 0 &\rightarrow \text{Hochpunkt} \end{aligned}$$

Beispiel

$$f(x) = x^3 - 3x^2$$
$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 0$$
$$x \cdot (3x - 6) = 0$$
$$x_1 = 0 \qquad x_2 = 2$$
$$f(0) = 0 \qquad f(2) = \text{-}4$$
$$f''(x) = 6x - 6$$
$$x_1 = 0 \qquad \to f''(0) = \text{-}6$$
$$x_2 = 2 \qquad \to f''(2) = 6$$

Somit ist ein Hochpunkt bei $H(0|0)$ und ein Tiefpunkt bei $T(2|\text{-}4)$

5.3.2 Wendepunkt

Ein Wendepunkt ist ein Punkt in einer Kurve, an dem sich die Krümmung („Richtung der Kurve") ändert.

1. zweite und dritte Ableitung bestimmen
2. zweite Ableitung Null setzen und Lösungen x_i bestimmen
3. x_i in $f(x)$ einsetzen $\to P_i(x_i|f(x_i))$
4. x_i in $f'''(x)$, falls ungleich Null ist P_i ein Wendepunkt

Beispiel

$$f(x) = x^4 - 6x^2 + 5$$
$$f'(x) = 4x^3 - 12x$$
$$f''(x) = 12x^2 - 12$$
$$f'''(x) = 24x$$
$$f''(x) = 0$$
$$\to 12x^2 - 12 = 0$$
$$x_1 = 1 \quad x_2 = \text{-}1$$
$$f(1) = 0 \quad f(-1) = 0$$
$$f'''(1) = 24 \neq 0 \quad f'''(\text{-}1) = \text{-}24 \neq 0$$

Es gibt also 2 Wendepunkte bei $W_1(\text{-}1|0)$ und $W_2(1|0)$

5.3.3 Zusammenfassung: Funktion & Ableitungsfunktion

Steigung

Das Vorzeichen von $f'(x)$ gibt an ob Funktion steigt (+) oder fällt (-).

Lokale Extrempunkte

An der Stelle x_0, an der f einen lokalen Extrempunkt hat, ist $f'(x_0) = 0$. Ist $f''(x_0) < 0$ so ist es ein Hochpunkt, ist $f''(x_0) > 0$ so ist es ein Tiefpunkt. (Ist $f''(x_0) = 0$ so kann es auch ein Sattelpunkt sein)

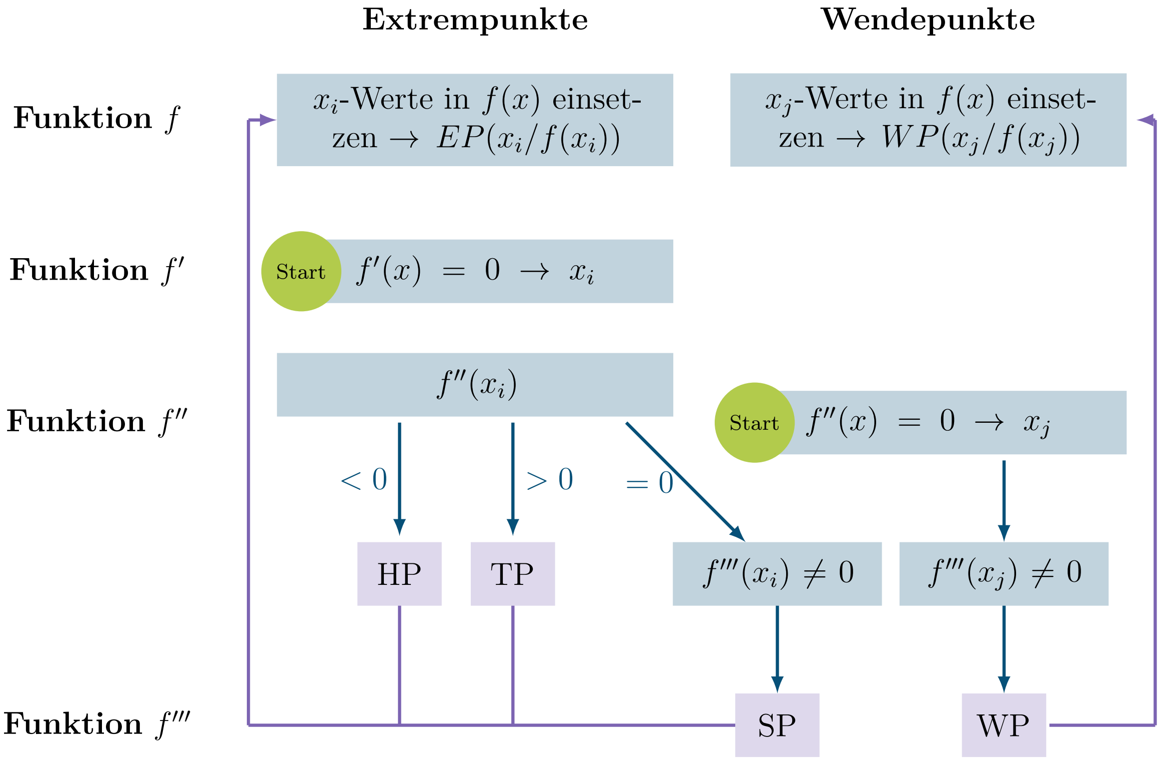
Krümmungsverhalten

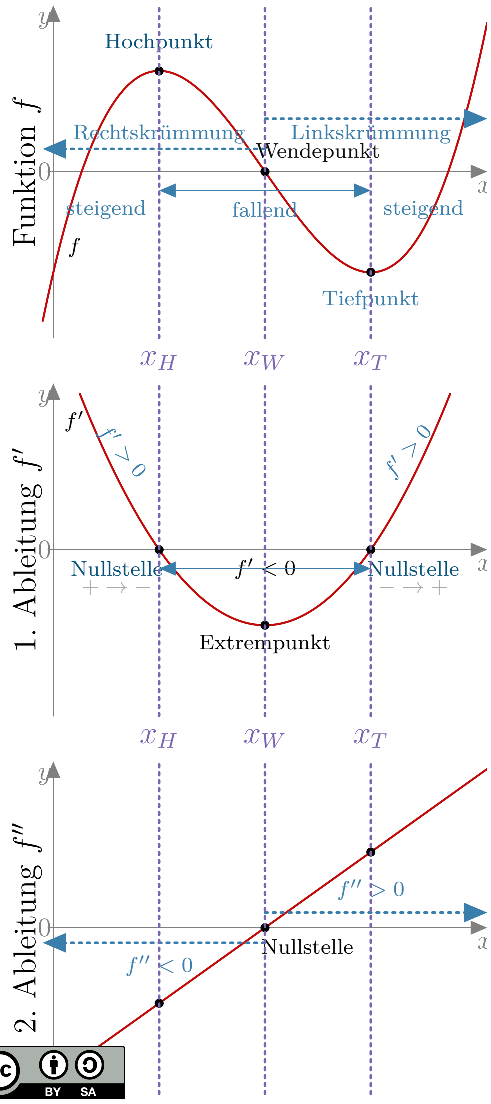
Das Vorzeichen von $f''(x)$ gibt an ob die Funktion linksgekrümmt (+) oder rechtsgekrümmt (-) ist.

Wendepunkte

An der Stelle x_0, an der f einen Wendepunkt hat, ist $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$. Ist dazu noch $f'(x_0) = 0$, so liegt ein Sattelpunkt vor.

5.3.4 Ikonografie zu Extrem- und Wendepunkten





Sollten die ersten Ableitungen an der Stelle x_0 allesamt Null sein, so entscheidet die n-te Ableitung welche erstmalig ungleich Null ist. Ist n ungerade, so ist es ein Sattelpunkt, ist n gerade so ist es ein Extrempunkt (Details analog 2. Ableitung).

5.4 Tangenten und Normalen

Eine Tangente ist eine Gerade t, die eine Kurve (Graphen von f) in einem bestimmten Punkt berührt, d.h. an diesem Ort x gilt sowohl $f(x) = t(x)$ (gleicher Punkt), als auch $f'(x) = t'(x)$ (gleiche Steigung).

5.4.1 Tangente durch Punkt auf der Kurve

Liegt der Punkt $P(a|f(a))$ auf der Kurve von f so gilt für die Tangentengleichung

$$t(x) = f'(a) \cdot (x - a) + f(a)$$

Beispiel

Die Tangentengleichung der Tangente an die Kurve von $f(x) = x^2 - 2$ im Punkt $P(1|\text{-}1)$ lautet mit $a = 1$, $f(a) = \text{-}1$, $f'(x) = 2x$ und somit $f'(a) = f'(1) = 2$ also

$$t(x) = 2 \cdot (x - 1) + (\text{-}1) = 2x - 1$$

5.4.2 Tangente durch Punkt neben der Kurve

Die gesuchte Tangente (meistens sogar mehrere) muss durch einen Punkt $Q(q|y_q)$ verlaufen der nicht auf der Kurve (Graphen) liegt, sondern die Kurve in einem weiteren Punkt P berührt.

1. Tangentenansatz: $t(x) = m \cdot x + c$
2. $f'(x)$ und somit $m = f'(u)$ ermitteln
3. Allgemeiner Punkt auf f sei $P(u|f(u))$ diesen in 5.4.1 einsetzen
   $t(x) = f'(u)(x - u) + f(u)$
4. Q ebenfalls einsetzen
   $y_q = f'(u)(q - u) + f(u)$
5. u ermitteln, dies sind die Stellen (x-Werte) an denen die möglichen Punkte P liegen
6. P ermitteln und dann wie 5.4.1 bzw in 5.4.1 einsetzen

Beispiel

Tangentengleichung von Punkt $Q(1|\text{-}6)$ (außerhalb) an den Graphen von $f(x) = x^3 - 4x + 2$

1. Tangentenansatz: $t(x) = m \cdot x + c$
2. $f'(x) = 3x^2 - 4$ also $m = 3u^2 - 4$
3. $t(x) = (3u^2 - 4)(x - u) + u^3 - 4u + 2$ (P ausgenutzt)
4. $\text{-}6 = (3u^2 - 4)(1 - u) + u^3 - 4u + 2$ (Q eingesetzt)
5. $u = 2$ (als einzige Lösung mit CAS)
6. Somit ist $P(2|f(2))$ also $P(2|2)$ und $t(x) = f'(2)(x - 1) - 6 = 8x - 14$

Achtung - es gibt oft mehr als eine Lösung für u und somit auch mehrere Punkte bzw. Tangenten

5.4.3 Tangente mit bekannter Steigung anlegen

Ist die Steigung $m = t'(a)$ der Tangente vorgegeben, so ermittelt man zuerst die Stellen an denen $f'(x) = m$ gilt und schließt dadurch auf die Punkte auf dem Graphen, an welchem solche Tangenten anliegen. Danach geht man wie in 5.4.1 vor.

Beispiel

Gesucht sind alle Tangenten mit der Steigung 1 an den Graphen von $f(x) = x^2 - 1$. Da $f'(x) = 2x = 1$ gelten muss, ist dies nur bei $x = \frac{1}{2}$ der Fall. Der zugehörige Punkt ist also $P(\frac{1}{2}| - \frac{3}{4})$ und somit die Tangentengleichung

$$t(x) = 1 \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) - \frac{3}{4} = x - \frac{5}{4}$$

5.4.4 Normalen

Wichtig

Hat eine Funktion die Steigung m in einem Punkt, so verläuft die Tangente durch diesen Punkt unter dem Winkel α zur x-Achse und es gilt $m = \tan(\alpha)$.

Eine Normale zu einer Funktion in einem Punkt, steht senkrecht auf der zugehörigen

Tangente. Das Vorgehen ist somit identisch zu den Tangenten, jedoch mit folgendem Ansatz:

$$n(x) = -\frac{1}{f'(a)} \cdot (x - a) + f(a)$$

Dieser beruht darauf, dass die Normale senkrecht auf der Tangente steht, also für die Steigungen $M_T \cdot m_N = \text{-}1$ gelten muss.

Beispiel

Die Normalengleichung der Tangente an die Kurve von $f(x) = x^2 - 2$ im Punkt $P(1|\text{-}1)$ lautet mit $a = 1$, $f(a) = \text{-}1$, $f'(x) = 2x$ und somit $f'(a) = f'(1) = 2$ also

$$t(x) = 2 \cdot (x - 1) + (\text{-}1) = 2x - 1$$

5.5 Symmetrie

$f(x) = f(\text{-}x) \to$ Symmetrie zur y-Achse

$f(\text{-}x) = \text{-}f(x) \to$ Symmetrie zum Ursprung

Beispiel

$$\begin{aligned} f(x) &= x^4 + 2x^2 - 2 \\ \to f(\text{-}x) &= (\text{-}x)^4 + 2(\text{-}x)^2 - 2 \\ f(\text{-}x) &= x^4 + 2x - 2 = f(x) \end{aligned}$$

$f(x)$ ist somit symmetrisch zur y-Achse

Beispiel

$$\begin{aligned} g(x) &= x^3 - x \\ g(\text{-}x) &= (\text{-}x)^3 - (\text{-}x) \\ g(\text{-}x) &= \text{-}x^3 + x = -(x^3 - x) \\ &= \text{-}g(x) \end{aligned}$$

$g(x)$ ist symmetrisch zum Ursprung

Beispiel

$$\begin{aligned} h(x) &= x^2 + x \\ h(\text{-}x) &= (\text{-}x)^2 + (\text{-}x) \\ h(\text{-}x) &= x^2 - x \end{aligned}$$

keine der beiden Symmetrien

5.6 Grenzwert einer Funktion

Grenzwerte von Funktionen spiegeln das Verhalten im Unendlichen wieder oder, falls wir x gegen einen anderen Wert als Unendlich laufen lassen, das entsprechende Verhalten. Es ist dabei hilfreich den Grobverlauf der wichtigsten Funktionen zu kennen!

Beispiel

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 & g(x) &= e^x \\ \lim_{x\to\infty} f(x) &= \infty & \lim_{x\to\infty} g(x) &= \infty \\ \lim_{x\to\text{-}\infty} f(x) &= \text{-}\infty & \lim_{x\to-\infty} g(x) &= 0 \end{aligned}$$

Gebrochenrationale Funktionen müssen noch ergänzt werden!

5.7 Monotonie

Das Monotonieverhalten gibt Auskunft darüber, in welchen Bereichen der Graph einer Funktion steigt oder fällt.

- Die Funktion f ist streng monoton steigend, wenn $f'(x) \geq 0$ gilt.
- Die Funktion f ist streng monoton fallend, wenn $f'(x) \leq 0$ gilt.

Beispiel

Am Beispiel $f(x) = x^2$

1. Erste Ableitung berechnen
   $f'(x) = 2x$
2. Nullstellen der ersten Ableitung berechnen
   $2x = 0 \rightarrow x = 0$
3. Zweite Ableitung berechnen
   $f''(x) = 2$
4. Nullstellen der ersten Ableitung in die 2. Ableitung einsetzen
   $f''(0) = 2 \rightarrow 2 > 0 \rightarrow$Tiefpunkt
5. Intervalle benennen
   erstes Intervall [-∞; 0]
   zweites Intervall $[0; \infty]$
6. Ergebnis ermitteln
   Da bei $x = 0$ ein Tiefpunkt vorliegt, fällt die Funktion von -∞ bis zu diesem Punkt.

1. Intervall: Da bei $x = 0$ ein Tiefpunkt vorliegt, fällt die Funktion von -∞ bis zu diesem Punkt. Es gilt: [-∞; 0] streng monoton fallend.

2. Intervall : Rechts vom Tiefpunkt dagegen steigt die Funktion: Es gilt $[0; +\infty]$ streng monoton steigend.

6 Wachstum

Definition

Eine Differenzialgleichung stellt eine Beziehung zwischen einer Funktion und mindestens einer ihrer Ableitungen her. Die Lösungen einer DGL sind Funktionen und keine Zahlen.

Das Wachstumsgesetz einer jeden Wachstumsart ist eine Lösung der Differenzialgleichung des entsprechenden Wachstums, was man durch Ableiten des Wachstumsgesetz leicht überprüfen kann.

Beispiel

$f'(x) = f(x)$ ist eine DGL, es wird dabei eine Funktion gesucht, die mit ihrer Ableitung übereinstimmt. Eine Lösung dieser DGL wäre also $f(x) = e^x$, aber auch $f(x) = 0$

6.1 lineares Wachstum

Ein lineares Wachstum liegt dann vor, wenn das Wachstumsgesetz folgende Form hat (vgl. lineare Funktion):

$$B(t) = k \cdot t + B(0)$$

Dabei ist $B(t)$ der Bestand zum Zeitpunkt t und $B(0)$ somit der Startbestand, pro Zeiteinheit wächst der Bestand um k an.

Um das lineare Wachstum später besser mit den anderen Wachstumsarten vergleichen zu können, leiten wir $B(t)$ einmal ab:

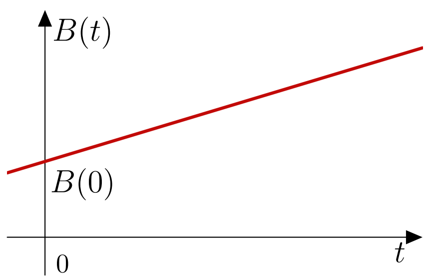
Regel

Die Differenzialgleichung des linearen Wachstums lautet:

$$B'(t) = k$$

Man kann sich darüber streiten, ob dies nun wirklich eine DGL ist, oder nicht - wenn man es mit einfach mal als „unreine“ DGL hinnimmt, so ist die Analogie später besser zu sehen.

Die Änderungsrate $B'(t)$ des Bestandes $B(t)$ ist somit konstant, der Bestand nimmt also pro Zeiteinheit immer um den selben Wert zu (oder ab) - wie auch aus dem Wachstumsgesetz ersichtlich ist.



Beispiel

Ein Baggersee mit einer Fläche von $1200\,\mathrm{m}^2$ wird durch regelmäßigen Kiesabbau erweitert. Alle 2 Arbeitstage wird die Wasseroberfläche um $120\,\mathrm{m}^2$ größer.

Es gilt also:

$$B(t) = 60 \cdot t + 1200$$
$$B'(t) = 60$$

Für $k < 0$ liegt ein linearer Zerfall vor.

6.2 exponentielles Wachstum

Regel

Die Differenzialgleichung des exponentiellen Wachstums lautet:

$$B'(t) = k \cdot B(t)$$

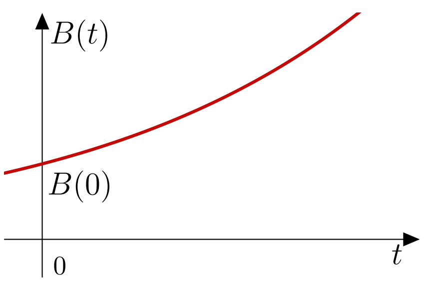
Die Änderungsrate $B'(t)$ des Bestandes $B(t)$ ist somit proprotional zum Bestand selbst, der Bestand nimmt also pro Zeiteinheit immer um den selben Faktor zu (oder ab). Das Wachstumsgesetz hat also die Form:

$$B(t) = B(0) \cdot e^{k \cdot t}$$

Manchmal wird das Wachstumsgesetz in der Form

$$B(t) = B(0) \cdot a^t$$

angegeben, setzt man $k = ln(a)$ so kommt man direkt wieder zur Gleichung 6.2. Egal mit welchem Bestand man beginnt, die Zeit, bis sich ein Bestand verdoppelt hat, ist immer dieselbe und es gilt: $T_D = \frac{ln(2)}{k}$, analog für die Halbwertszeit $T_H = -\frac{ln(2)}{k}$



Für $k < 0$ bzw. $0 < a < 1$ liegt ein Zerfall vor

Beispiel

In einem Ozean vergrößert sich die von Algen bedeckte Fläche alle 3 Tage um 10 %. Zu Beginn ist eine Fläche von 120 m^2 be-

6.3 beschränktes Wachstum

Regel

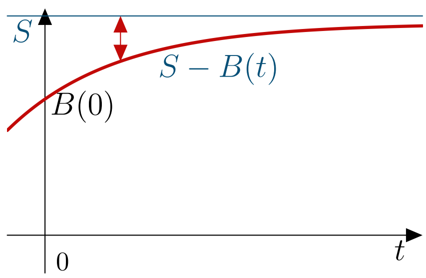
Die Differenzialgleichung des beschränkten Wachstums lautet:

$$B'(t) = k \cdot (S - B(t))$$

Die Änderungsrate $B'(t)$ des Bestandes $B(t)$ ist somit proportional zum Sättigungsmanko $S - B(t)$, wobei S die Schranke (Grenze) ist. Das Wachstum ist also proportional zur Differenz zur Grenze. Das Wachstumsgesetz lautet also:

$$B(t) = S - c \cdot e^{-k \cdot t}$$

Hierbei ist $B(0) = S - c$ und k selbst nie negativ.



Beispiel

In einem See der Fläche 1200 m^2 sind zu Beginn 120 m^2 von Algen bedeckt, pro Tag werden 10 % der noch nicht bedeckten Fläche von den Algen „erobert“.

$$B'(t) = 0{,}1 \cdot (1200 - B(t))$$
$$B(t) = 1200 - \underbrace{1080}_{1200-120} \cdot e^{-0{,}1 \cdot t}$$

7 Stochastik

7.1 Einstufige Zufallsexperiment

Definition

Ein **Zufallsexperiment** ist ein Versuch, bei welchem keine Vorhersage getroffen werden kann, welches Ergebnis auftreten wird, es lassen sich jedoch vor dem Versuch alle möglichen Ergebnisse angeben.

Bei einem Zufallsexperiment gibt es verschiedene **Ergebnisse**, diese ergeben zusammen die Ergebnismenge S. Fasst man mehrere Ergebnisse zusammen, so spricht man von einem **Ereignis** E.

Beispiel

Beim Würfeln mit einem Standard-Würfel gibt es die 6 Ergebnisse „Würfel zeigt Augenzahl 1“, „Würfel zeigt Augenzahl 2“,... und „Würfel zeigt Augenzahl 6“. Dies ist ein Zufallsexperiment, da es unter gleichen Voraussetzungen beliebig oft wiederholt werden kann. Die Ergebnismenge S ist $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, ein Ereignis wäre zum Beispiel „Augenzahl ist gerade“$E_{gerade} = \{2, 4, 6\}$.

Ordnet man jedem Ergebnis einen Wert k (reelle Zahl) zu, so bezeichnet man diese Zuordnung (Funktion) als **Zufallsvariable**, meistens verwendet man dafür X. Jeder Wert k der Zufallsvariable tritt mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit $P(X = k)$ auf. Die Zuordnung P nennt man **Wahrscheinlichkeitsverteilung** und sie wird oft in einer Tabelle dargestellt.

Beispiel

Wahrscheinlichkeitsverteilung eines nicht fairen Würfel, die Zufallsvariable gibt die erzielte Augenanzahl an:

X	1	2	3	4	5	6
$P(X)$	0,1	0,2	0,25	0,25	0,1	0,1

Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ergibt sich durch addieren der Wahrscheinlichkeiten der zugehörigen Ergebnisse. Summiert man die Wahrscheinlichkeiten aller Ergebnisse auf, so muss dies stets 1 (100 %) ergeben.

Beispiel

Ein Glücksrad ist zur Hälfte „grün“, und jeweils zu einem Viertel „rot“ bzw. „blau“. Eine Zufallsvariable wäre also eine Zuordnung, die diesen Ergebnissen einen Wert zuordnet z.B. $X(grün) = 1$, $X(rot) = 2$ und $X(blau) = 3$.

In der Hälfte der Fälle ist „grün“ zu erwarten, was dem Wert k=1 zugeordnet wurde, die Wahrscheinlichkeit für „grün“ ist also $P(grün) = P(X = 1) = \frac{1}{2}$. Dies führt zu folgender Wahrscheinlichkeitsverteilung P:

Ereignis	grün	rot	blau
X(Ereignis) = k	1	2	3
$P(X = k)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Die Wahrscheinlichkeit für “rot“ oder „blau“ ergibt sich durch Addition:
$P(X > 1) = P(X = 2) + P(X = 3)$ also $\frac{1}{2}$ (alle Wahrscheinlichkeiten ergeben zusammen 1).

7.1.1 Laplace-Experiment

Treten alle n möglichen Ergebnisse mit der gleichen Wahrscheinlichkeit auf, so nennt man ein solches Experiment ein Laplace-Experiment. Da jedes Ergebnis mit der Wahrscheinlichkeit p auftritt muss gelten:

$$\underbrace{p+p+\cdots+p}_{n-mal}=1 \quad \Rightarrow \quad p=\frac{1}{n}$$

$$p=P(\text{Ergebnis})=\frac{1}{\text{Anzahl der möglichen Ergebnisse}}$$

für ein Ereignis E aus m Ergebnissen, folgt $P(E)=m\cdot p$

$$p=P(\text{Ereignis})=\frac{\text{Anzahl der günstigen Ergebnisse}}{\text{Anzahl der möglichen Ergebnisse}}$$

Beispiel
Das Würfeln mit einem fairen Würfel ist ein Laplace-Experiment. Es gibt 6 Ergebnisse, also ist deren Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$ und zum Beispiel $P(1 \text{ oder } 2)=2\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$

7.1.2 Gegenereignis

Das Ereignis $\bar{A}$ nennt man Gegenereignis zu A und bedeutet, das NICHT A eintritt.

$$P(A)=1-P(\bar{A})$$

Beispiel
Will man berechnen wie wahrscheinlich es ist eine Augenzahl zu werfen, die kleiner als 6 ist, so kann man entweder die Wahrscheinlichkeiten für 1 bis 5 addieren oder man nutzt das Gegenereignis (NICHT 6). $P(\bar{6})=1-P(6)=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$.

7.2 Häufigkeiten und Erwartungswert

Wenn bei n Zufallsexperiment n_A mal das Ergebnis A aufgetreten ist, so heißt n_A die **absolute** Häufigkeit und $\frac{n_A}{n}$ die **relative** Häufigkeit des Eintretens von A.

Regel
Gesetz der großen Zahl - Für eine Statistik werden n Zufallsexperimente unter den gleichen Bedingungen und unabhängig voneinander durchgeführt. Dabei spielt es keine Rolle, ob die Experimente gleichzeitig oder hintereinander ausgeführt werden, solange sie sich nicht gegenseitig beeinflussen. Dann strebt die relative Häufigkeit $\frac{n_A}{n}$ für das Ergebnis A mit steigender Anzahl n der Zufallsexperimente gegen die Wahrscheinlichkeit $P(A)$.

Beispiel
Reißnägel unterscheiden sich stark, es ist schwer vorhersagbar ob er nun auf der Fläche oder der Nadel landet. Wenn man 1000 mal einen Reißnagel wirft so bekommt man z.B. 632 mal „Fläche“ (absolute Häufigkeit) und
$\frac{632}{1000}=63{,}2\,\%$ (relative Häufigkeit). Je mehr Experimente man durchführt, desto besser wird die relative Häufigkeit als Näherungswert für $P(Fläche)\approx 0{,}63$.

Der Erwartungswert $E(X)$ einer Zufallsvariablen X ist der Wert, dem sich der Mittelwert der Zufallsvariablen bei häufiger Wiederholung einpendelt. Kennt man die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X, so gilt:

$$E(X)=x_1\cdot P(X=x_1)+x_2\cdot P(X=x_2)+\cdots$$

Beispiel

Für eine Zufallsvariable X, sei folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung gegeben:

k	0	1	2	3
$P(X=k)$	0,5	0,3	0,05	0,15

$E(X) = 0 \cdot 0{,}5 + 1 \cdot 0{,}3 + 2 \cdot 0{,}05 + 3 \cdot 0{,}15 = 0{,}85$

Im Durchschnitt wird 0,85 gewonnen, falls es zum Beispiel eine Lotterie war.

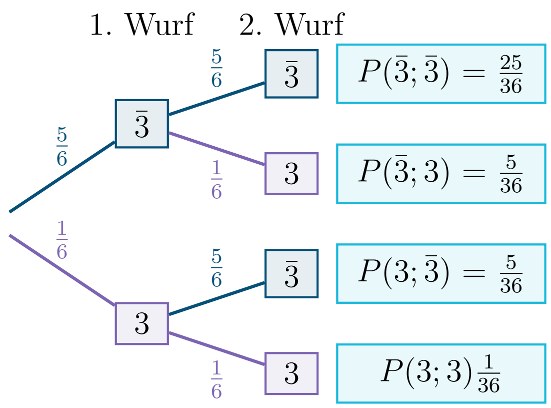
7.3 Mehrstufige Zufallsexperimente

Pfadmultiplikationsregel – In einem Baumdiagramm erhält man die Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses durch Multiplikation aller Wahrscheinlichkeiten des Pfades, der zu dem gewünschten Ergebnis führt.

Beispiel

Wir würfeln zwei mal mit einem Würfel, uns interessieren nur die Ergebnisse 3 und $\bar{3}$ mit den Wahrscheinlichkeiten $P(3) = \frac{1}{6}$ und $P(\bar{3}) = \frac{5}{6}$ - wie wahrscheinlich ist es genau eine 3 zu würfeln?

Die Summe der Wahrscheinlichkeiten ergibt 1, wir haben uns bisher also nicht verrechnet! Nun sehen wir, dass jedoch zwei Ergebnisse zu dem Ereignis „genau einmal 3“ gehören, wir müssen diese beiden Wahrscheinlichkeiten also addieren



$$\begin{aligned} P(\textit{genau eine 3}) &= P(3;\bar{3}) + P(\bar{3};3) \\ &= \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{10}{36} \end{aligned}$$

7.4 Kombinatorik

In der Kombinatorik muss man vier Fälle unterscheiden:

1) Aus einer Urne mit n Kugeln wird k mal mit Zurücklegen gezogen. Dann gibt es $\underbrace{n \cdot n \cdots n}_{k-mal} = n^k$ verschiedenen Ergebnisse.

2) Aus einer Urne mit n Kugeln wird k mal ohne Zurücklegen gezogen. Dann gibt es $n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)$ verschiedenen Ergebnisse.

3) Aus einer Urne mit n Kugeln werden alle n Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. Dann gibt es $n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1 = n!$ („n Fakultät“) verschiedenen Ergebnisse.

4) Aus einer Urne mit n Kugeln wird k mal ohne Zurücklegen gezogen. Jeweils alle k! Ergebnisse mit gleicher Auswahl aber unterschiedlicher Reihenfolge der k Kugeln werden als Kombination zusammengefasst. Dann gibt es $\frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ mögliche Kombinationen. Die Zahlen $\binom{n}{k}$ („n über k“) nennt man Binomialkoeffizent. Es gibt $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten, aus n verschiedenen Objekten k Objekte auszuwählen.

Beispiel

Lotto - 6 Kugeln aus 49, dabei ist die Reihenfolge egal. Es gibt also $49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44$ Möglichkeiten, wenn die Reihenfolge wichtig wäre. Für jede 6er-Serie gibt es $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ Varianten der Reihefolge. Es gibt also insgesamt $\frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{49!}{(49-6)!6!} = \begin{pmatrix} 49 \\ 6 \end{pmatrix} = 13983816$ Möglichkeiten

7.5 Stochastische Unabhängigkeit

Sind A und B zwei Mengen, so gehören zur Menge $A \cap B$ alle Elemente die zu A und auch zu B gehören (Schnittmenge)

Zwei Ereignisse A und B heißen unabhängig voneinander, wenn gilt:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Beispiel

In einer Urne sind 3 Kugeln welche nummeriert sind. Es wird zweimal mit zurücklegen gezogen. Wir betrachten 4folgende Ereignisse

- E_1: im ersten Zug eine 1 mit $P(E_1) = \frac{1}{3}$
- E_2: im zweiten Zug eine 3 mit $P(E_2) = \frac{1}{3}$
- E_3: Beide Zahlen ungerade mit $P(E_3) = \frac{4}{9}$

$$\left.\begin{array}{l} P(E_1 \cap E_2) = \frac{1}{9} \textit{ nur \{1;3\} passt} \\ P(E_1) \cdot P(E_2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9} \end{array}\right\} \text{unabhängig}$$

$$\left.\begin{array}{l} P(E_1 \cap E_3) = \frac{2}{9} \textit{ \{1;3\} und \{1;1\}} \\ P(E_1) \cdot P(E_3) = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{9} = \frac{4}{27} \end{array}\right\} \text{abhängig}$$

7.6 Binomialverteilung

Ein Zufallsexperiment mit exakt **zwei** interessanten Ergebnissen heißt ein **Bernoulli-Experiment**. Die Ergebnisse bezeichnet man als Treffer und Nieten mit der Trefferwahrscheinlichkeit p und der Nietenwahrscheinlichkeit $q = 1 - p$. Wird ein Bernoulli-Experiment n-mal wiederholt und ändert sich dabei die Wahrscheinlichkeit nicht, so spricht man von einer n-stufigen **Bernoulli-Kette**.

Gegeben ist eine n-stufige Bernoulli-Kette mit Erfolgswahrscheinlichkeit p ($q = 1 - p$) und Zufallsvariable X: Anzahl der Erfolge

Die Wahrscheinlichkeit für k Erfolge beträgt:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$

als verkürzte Schreibweise $B_{n,p}(k)$ (`binompdf` auf dem TI)

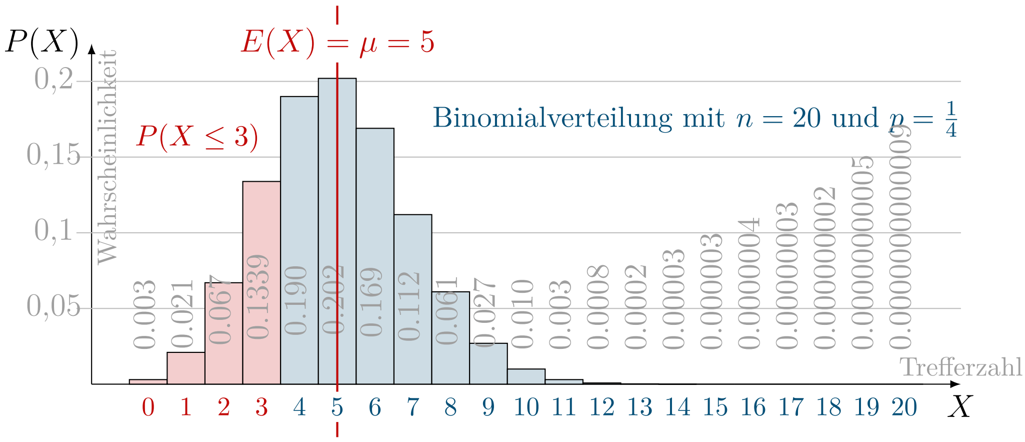
Eine Tabelle mit den Wahrscheinlichkeiten für die n-fache Erfolge wird als „Binomialverteilung" bezeichnet. Den Erwartungswert einer binomialverteilten Zufallsvariablen erhält man durch $E(X) = n \cdot p$

Beispiel

Ein Glücksrad (rot-weiß) wird 7 mal gedreht, k ist die Anzahl der Treffer (weiß), gesucht wird die jeweilige Anzahl der Pfade für k Treffer. ($0! = 1$, ansonsten „Cr") für $k = 4$ gibt es $\binom{7}{4} = \frac{7!}{4!3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 35$ Pfade

Die Binomialverteilung hat folgende Eigenschaften:

- Die Form ist einen „Glockenkurve"
- Das Maximum der „Kurve" liegt beim Erwartungswert (oder knapp daneben, wenn der Erwartungswert keine natürlich Zahl ist)



7.6.1 Kumulierte Wahrscheinlichkeit

Die Wahrscheinlichkeit für höchstens k Erfolge wird aus der Summe aller Erfolge von 0 bis k berechnet und als kumulierte Wahrscheinlichkeit bezeichnet. (`binomcdf` auf dem TI)

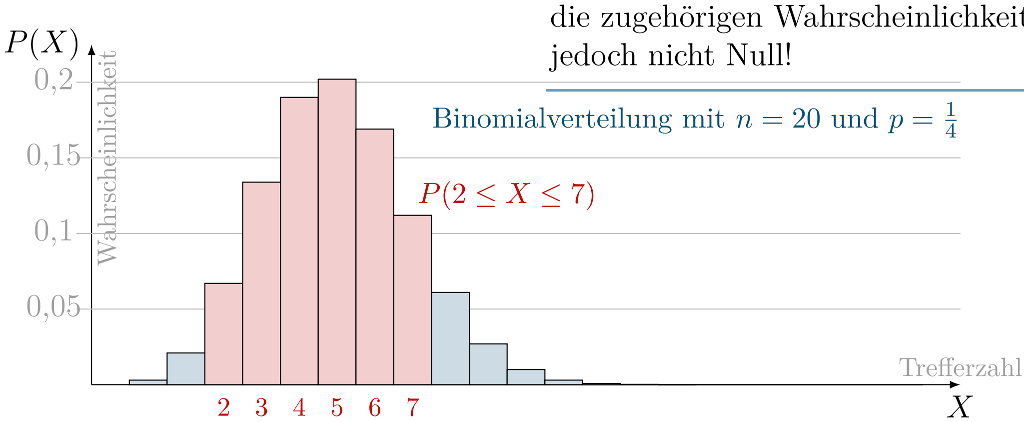
$$P(X \leq k) = P(X = 1) + P(X = 2) + \cdots + P(X = k)$$

Beispiel

Ein Glücksrad wird $n = 20$ mal gedreht, ein Treffer „1" tritt mit der Wahrscheinlichkeit von $p = \frac{1}{4}$ auf. Die Zufallsvariable X ist also $B_{20;\frac{1}{4}}$ verteilt (binomialverteilt mit $n = 20$ und $p = \frac{1}{4}$).

1. Wahrscheinlichkeit für „keine 1" $P(X = 0) \approx 0{,}0032$
2. Der Erwartungswert hat den Wert $E(X) = 20 \cdot \frac{1}{4} = 5$
3. Wahrscheinlichkeit, dass höchstens drei mal „1" erscheint: $P(X \leq 3) \approx 0{,}225$
4. Wahrscheinlichkeit, dass mindestens zwei mal, jedoch höchstens sieben mal eine „1" erscheint: $P(2 \leq X \leq 7) = P(X \leq 7) - P(X \leq 1) \approx 0{,}873$

Nachfolgende Diagramme veranschaulichen die Lösungen. Einige Balken sind jedoch zu klein um noch dargestellt werden zu können, die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten sind jedoch nicht Null!



7.7 Hypothesen-Tests bei Binomialverteilungen

Ein statistisches Testverfahren lässt sich im Prinzip mit einem Gerichtsverfahren vergleichen. Das Verfahren hat (meistens) als Zweck festzustellen, ob es ausreichend Beweise gibt, den Angeklagten zu verurteilen. Es wird dabei immer von der Unschuld eines Verdächtigen ausgegangen, und so lange große Zweifel an den Belegen für ein tatsächliches Vergehen bestehen, wird ein Angeklagter freigesprochen. Nur wenn die Indizien für die Schuld eines Angeklagten deutlich überwiegen, kommt es zu einer Verurteilung. Es gibt demnach zu Beginn des Verfahrens die beiden Hypothesen H_0 „der Verdächtige ist unschuldig“ und H_1 „der Verdächtige ist schuldig“. Erstere nennt man *Nullhypothese*, von ihr wird vorläufig ausgegangen. Die zweite nennt man *Alternativhypothese*. Sie ist diejenige, die zu „beweisen“ versucht wird. Um einen Unschuldigen nicht zu leicht zu verurteilen, wird die Hypothese der Unschuld erst dann verworfen, wenn ein Irrtum sehr unwahrscheinlich ist. Man spricht auch davon, die Wahrscheinlichkeit für einen *Fehler erster Art* (also das Verurteilen eines Unschuldigen) zu kontrollieren. Aufgrund der stochastischen Struktur des Testproblems lassen sich wie in einem Gerichtsverfahren Fehlentscheidungen grundsätzlich nicht vermeiden. `http://de.wikipedia.org/wiki/Statistischer_Test`

7.7.1 Einseitige Tests

Wer Entscheidungen zu treffen hat, weiß oft erst im Nachhinein ob seine Entscheidung richtig war. Die Unsicherheit eine Entscheidung zu treffen, beinhaltet immer eine gewisse Fehlerwahrscheinlichkeit. Der Hypothesentest gibt uns eine Richtlinie für die Wahl einer Alternativentscheidung. Wir treffen unsere Entscheidung auf der Grundlage dessen, was wir für richtig erachten. Das nennen wir die Nullhypothese H_0. Eine Alternativentscheidung nennen wir Alternativhypothese H_1.

Ablaufplan:

- Formulierung der Nullhypothese H_0 und der Alternativhypothese H_1
- Festlegung des Signifikanzniveaus α (manchmal vorgegeben)
- Bestimmung des Annahme- und Ablehnungsbereichs der Nullhypothese
- gegebenenfalls Ziehung der Stichprobe
- Treffen der Testentscheidung - liegt das Ergebnis der Stichprobe innerhalb des Annahmebereichs, wird H_0 angenommen, anderenfalls abgelehnt

Tipps zum Aufstellen der Hypothesen:

1. Was ich zeigen oder beweisen will, gehört in die Alternativhypothese
2. Das Gleichheitszeichen gehört immer in die Nullhypothese
3. Die Annahme der Nullhypothese führt immer zur Ablehnung der Alternativhypothese, ist aber kein Beweis dafür, dass die Nullhypothese stimmt. Die Ablehnung der Nullhypothese führt zur Annahme der Alternativhypothese.

Definition

- Fehler 1. Art: Die Nullhypothese wird verworfen, obwohl sie richtig ist
- Fehler 2. Art: Die Nullhypothese wird angenommen, obwohl sie falsch ist

- $H_1: \ p < p_0$ hat einen linksseitigen Test zur Folge (Alternativhypothese!)

  Annahmebereich $A = [a;\ n]$ mittels Tabelle der kumulierten Wahrscheinlichkeit Signifikanzniveau α suchen

- $H_1: \ p > p_0$ hat einen rechtsseitigen Test zur Folge (Alternativhypothese!)

Annahmebereich $A = [0;\ b]$ mittels Tabelle der kumulierten Wahrscheinlichkeit $1 - \alpha$ suchen

Beispiel 1: Eine Befragung aller Schüler im letzten Jahr, ergab dass 25 % von ihnen nicht mit dem Essen der Mensa zufrieden waren. Es wird vermutet, dass die Unzufriedenheit inzwischen zugenommen hat. Um dies zu beurteilen, werden 20 Schüler befragt.

Die Nullhypothese lautet somit $H_0:\ p = 0{,}25$ und die Alternativhypothese $H_1:\ p > 0{,}25$

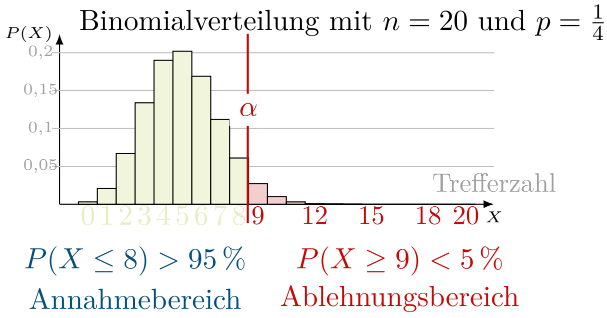
6 Schüler waren mit dem Essen unzufrieden, das ist zwar mehr als der Erwartungswert $E(X) = 20 \cdot \frac{1}{4} = 5$, jedoch ist die Abweichung noch recht gering, dies sieht man an der Wahrscheinlichkeit $P(X \geq 6) = 1 - P(X \leq 5) \approx 0{,}383$. In fast 40 % der Fällen sollte man also mit einem Ergebnis rechnen, dass größer als der Erwartungswert ist.

Um einen Ablehnungsbereich festlegen zu können braucht man als ein Signifikanzniveau, will man eine Sicherheit von mindestens 95 %, also nur in 5 % der Fällen zu unrecht das Niveau des Essens kritisieren, so wählt man das Signifikanzniveau $\alpha = 1 - 0{,}95 = 0{,}05$ und bestimmt k so, dass gilt $P(X \geq k) \leq 0{,}05$

$$\begin{aligned} P(X \geq k) &\leq 0{,}05 && |\text{Gegenereignis} \\ 1 - P(X \leq k-1) &\leq 0{,}05 && |-1 \\ \text{-}P(X \leq k-1) &\leq \text{-}0{,}95 && |\cdot(\text{-}1) \\ P(X \leq k-1) &\geq 0{,}95 && |\text{mit GTR} \\ P(X \leq 7) &\approx 0{,}898 \\ P(X \leq 8) &\approx 0{,}959 \\ k-1 &= 8 \\ k &= 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textit{Annahmebereich}: \quad & A = \{0; 1; ..; 8\} \\ \textit{Ablehnungsbereich}: \quad & \overline{A} = \{9; 10; ..; 20\} \end{aligned}$$

Bei 9 oder mehr negativen Äußerungen über das Essen, kann man mit 95 %-iger Sicherheit davon ausgehen, dass die Qualität schlechter empfunden wird, als vor einem Jahr.



Man spricht von einem **rechtsseitigen** Test, da der Ablehnungsbereich auf der rechten Seite der Verteilung liegt.

Beispiel 2: Ein Losverkäufer verkauft 100 Lose und behauptet es seien 40 Gewinne darunter. Also $H_0:\ p = 0{,}4$ und $H_1:\ p \leq 0{,}4$. Gehen wir von einer Stichprobe von 20 Losen aus (mit Zurücklegen), somit ist die Zufallsvariable X (Anzahl der Gewinne) $B_{20;\,0{,}4}$-verteilt ($E(X) = \mu = 8$). Sei das Signifikanzniveau $\alpha = 0{,}05$, so gilt, da „links“der Ablehnungsbereich ist (**linksseitiger Test**):

$$\begin{aligned} P(X \leq k) &\leq 0{,}05 \\ P(X \leq 3) &\approx 0{,}016 \\ P(X \leq 4) &\approx 0{,}051 \\ k &= 3 \\ \text{Ablehnungsbereich } A &= \{0;\ 1\ ;\ 2; 3\} \\ \text{Annahmebereich } \overline{A} &= \{4; ..; 20\} \end{aligned}$$

Bei einer Stichprobe wurden nur 3 Gewinne gezogen, die Nullhypothese muss also abgelehnt werden und glauben dem Losverkäufer nicht. Allerdings können wir uns mit der Ablehnung der Null-Hypothese auch irren, da die Werte 0 bis 3 für X bei korrekter Null-Hypothese mit einer Wahrscheinlichkeit von 1,6 % eintreten. Das ist die sogenannte Irrtumswahrscheinlichkeit (oder **Fehler 1. Art**). (Bei einem vorsichtigeren Signifikanzniveau von z.B. 1 %, so würde die Nullhypothese NICHT abgelehnt werden.

8 Analytische Geometrie (Vektoren)

Verschiebung durch drei Zahlenangaben:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Der Vektor $\vec{a}$ ist eine Verschiebung um 7 Einheiten in x_1-Richtung, 3 Einheiten entgegen der x_2-Richtung und 2 Einheiten in x_3-Richtung. Oft wird aber auch $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ für den Ortsvektor des Punktes $A(7|\text{-}3|2)$ benutzt, also der Vektor, der vom Ursprung aus auf den Punkt A zeigt.

Wichtig

$$\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Nullvektor}$$

Verschiebung von Punkt P auf Punkt Q:

Beispiel

$P(3|\text{-}2|\text{-}1)$

$Q(7|\text{-}3|5)$

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 7-3 \\ -3-(-2) \\ 5-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

8.1 Rechnen mit Vektoren

8.1.1 Summe/Differenz zweier Vektoren

$$\vec{s} = \vec{a} \pm \vec{b} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \pm b_1 \\ a_2 \pm b_2 \\ a_3 \pm b_3 \end{pmatrix}$$

8.1.2 Vervielfachen

$$r \cdot \vec{v} = r \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot v_1 \\ r \cdot v_2 \\ r \cdot v_3 \end{pmatrix}$$

8.1.3 Skalarprodukt und Länge eines Vektors

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

Definition

Der Betrag eines Vektors ist definiert als

$$|\vec{a}| = a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

und entspricht der Länge des Vektors.

Wichtig

Das Ergebnis ist eine Zahl, kein Vektor!

Zwei Vektoren stehen zueinander senkrecht (orthogonal), falls ihr Skalarprodukt 0 ergibt.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$$

Für den Winkel zwischen zwei Vektoren gilt:

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

Beispiel

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \cos(\alpha) &= \frac{1 \cdot (3) + 4 \cdot 3 + (2) \cdot 1}{\sqrt{1^2 + 4^2 + (2)^2} \cdot \sqrt{(3)^2 + 3^2 + 1^2}} \\ &= \frac{7}{\sqrt{21} \cdot \sqrt{19}} \\ \alpha &= 69{,}5^\circ \end{aligned}$$

8.1.4 Kreuzprodukt

Das Kreuzprodukt, oder auch Vektorenprodukt, dient dazu, zwei Vektoren miteinander im Raum zu verknüpfen. Dies funktioniert jedoch nur im dreidimensionalen Raum.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$$

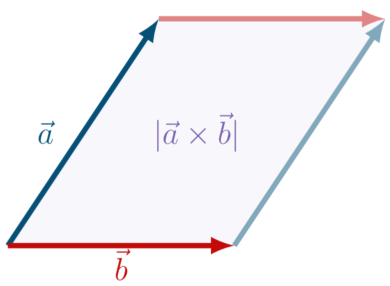
dabei gilt:

$$\vec{c} \perp \vec{a} \; ; \; \vec{c} \perp \vec{b}$$

weiter gilt:

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\alpha)$$

$|\vec{a} \times \vec{b}|$ gibt den Flächeninhalt der von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Fläche an:



Für die Berechnung des Kreuzproduktes gilt:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

Beispiel

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 - 0 \cdot 3 \\ 0 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 3 - 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Beispiel

Volumenberechnung einer dreiseitigen Pyramide mit: $P(0|0|0)$; $Q(0|3|0)$; $R(1{,}5|1{,}5|0)$ und einer Höhe von 9.

Der Flächeninhalt A des Parallelogramms wäre

$$A = \left| \vec{PQ} \times \vec{PR} \right|$$

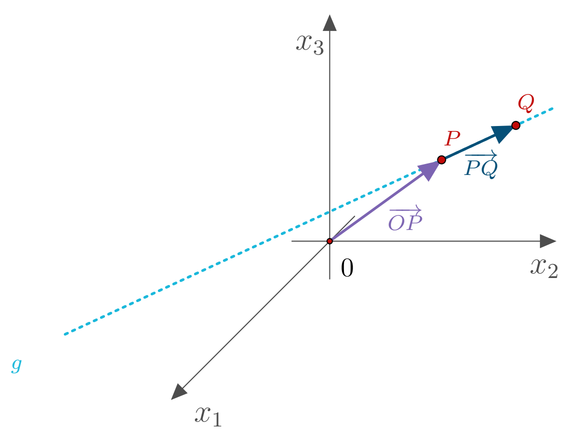
$$= \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 1{,}5 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -4{,}5 \end{pmatrix} \right| = 4{,}5$$

Die Grundfläche G der Pyramide ist genau halb so groß, also

$$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 2{,}25 \cdot 9 = 6{,}75$$

8.2 Geraden

8.2.1 Parameterdarstellung von Geraden



$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \text{Stützvektor}$$

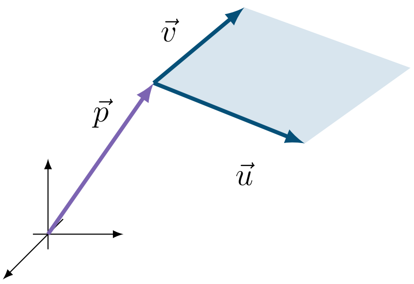
$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} q_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 \\ q_3 - p_3 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \text{Richtungsvektor}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} q_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 \\ q_3 - p_3 \end{pmatrix} \qquad t \in \mathbb{R}$$

8.3 Ebenen

8.3.1 Ebenenformen

Parameterform



Definition

$$E : \vec{x} = \vec{p} + r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v} \quad r,s \in \mathbb{R}$$

Hierbei ist

- der Stützvektor $\vec{p} = \overrightarrow{OA}$ ein Vektor der auf die Ebene bzw. einen Punkt der auf der Ebene liegt zeigt.
- ein Spannvektor $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ (bzw. $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$) ein Vektor zwischen zwei Punkten der Ebene. Durch zwei dieser Vektoren wird die Ebene „aufgespannt“.

Beispiel

Seien die Punkte $A(1|2|3)$, $B(0|0|0)$ und $C(3|3|3)$ in einer Ebene E. Somit ist der Stützvektor der Ebene beispielsweise

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

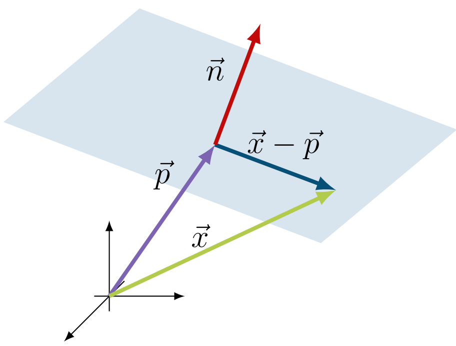
Die Richtungsvektoren der Ebene sind nun

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{v} = \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Somit lautet die Parameterdarstellung

$$E : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Normalenform



Definition

$$E : (\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = 0$$

Hierbei ist

- der Stützvektor $\overrightarrow{OP} = \vec{p}$ ein Vektor der auf die Ebene bzw. einen Punkt der in der Ebene liegt zeigt
- der Normalenvektor $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$ ein Vektor der senkrecht (orthogonal) zur Ebene steht. Er kann als Kreuzprodukt zweier Spannvektoren ermittelt werden.

Beispiel

Seien die Punkte $A(1|2|3)$, $B(0|0|0)$ und $C(3|3|3)$ in einer Ebene E. Ist der Stützvektor beispielsweise

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

so ist der Normalenvektor der Ebene das Kreuzprodukt der beiden Spannvektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ (siehe S. 39), also

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ \text{-}6 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Die Ebenengleichung in Normalenform ergibt sich daher zu

$$E : \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ \text{-}6 \\ 3 \end{pmatrix} = 0.$$

Hesse'sche Normalenform

Sei $\vec{n}_0$ der normierte Normalenvektor (Normalenvektor mit $|\vec{n}| = 1$) einer Ebene E, so nennt man

$$E : (\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n}_0 = 0$$

die Hesse'sche Normalenform der Ebene E. Diese stellt eine Sonderform der Normalenform dar und ist beispielsweise nützlich beim Bestimmen des Abstandes eines Punktes und einer Ebene.

Beispiel

Um die Ebenengleichung des letzten Beispiels in die Hesse'sche Normalenform zu überführen, muss der Normalenvektor $\vec{n}$ normiert werden:

$$\vec{n}_0 = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{1}{\sqrt{54}} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ \text{-}6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{54}} \\ \text{-}\frac{6}{\sqrt{54}} \\ \frac{3}{\sqrt{54}} \end{pmatrix}.$$

Somit ergibt sich

$$E : \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{54}} \\ \text{-}\frac{6}{\sqrt{54}} \\ \frac{3}{\sqrt{54}} \end{pmatrix} = 0.$$

Koordinatenform

Definition

$$E : n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = d$$

Hierbei ist

- d das Skalarprodukt eines Normalenvektors mit einem Stützvektor.
- $\vec{n}$ ein Normalenvektor mit den Koordinaten n_1 bis n_3.

Beispiel

Seien die Punkte $A(1|2|3)$, $B(0|0|0)$ und $C(3|3|3)$ in einer Ebene E. Ist der Stützvektor beispielsweise

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

so ist der Normalenvektor der Ebene das Kreuzprodukt der beiden Spannvektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ (siehe S. 39), also

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ \text{-}6 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Mit

$$d = 3 \cdot 1 + (\text{-}6) \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 0$$

lautet die Koordinatengleichung

$$E : 3x_1 - 6x_2 + 3x_3 = 0.$$

8.4 Darstellung von Ebenen

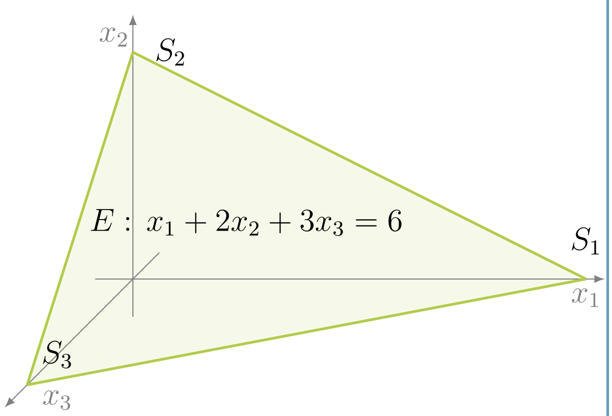
Ebenen lassen sich im dreidimensionalen Raum nur schwer darstellen, ihre Lage ist meistens uneindeutig. Nimmt man die Spurpunkte (Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen) zu Hilfe, so erhält man jedoch eine recht anschauliche Darstellung.

1. Ebene gegebenenfalls in Koordinatenform umwandeln
2. Koordinaten paarweise Null setzen um so die maximal 3 Spurpunkte zu bekommen
3. Spurpunkte einzeichnen und verbinden
4. Sind es weniger als 3 Spurpunkte, so ist die Ebene zu den Koordinatenachsen, auf welchen keine Spurpunkte liegen parallel

Ist $(0|0|0)$ der einzige Spurpunkt, so ist diese Methode nicht anwendbar! Eine Veränderung der Konstante (rechts) sorgt nur für einen parallele Verschiebung der Ebene, da der Normalenvektor gleich bleibt.

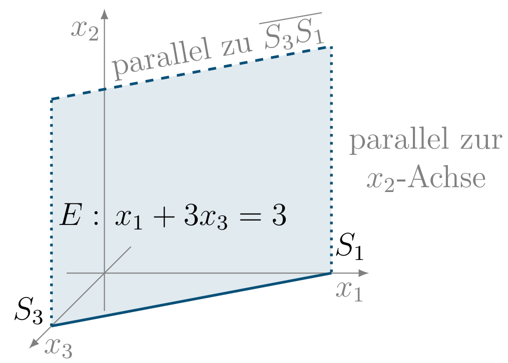
Beispiel

Sei $E: x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6$, so erhält man mit $x_1 = x_2 = 0$ den Spurpunkt $S_3(0|0|2)$ und analog $S_2(0|3|0)$ sowie $S_1(6|0|0)$.



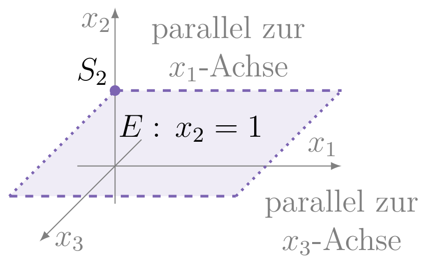
Beispiel

Sei $E: x_1 + 3x_3 = 3$, so erhält man die Spurpunkte $S_1(3|0|0)$ und $S_3(0|0|1)$, die Ebene ist also parallel zur x_2-Achse.



Beispiel

Sei $E: x_2 = 1$, so erhält man den Spurpunkte $S_2(0|1|0)$ die Ebene ist also parallel zur x_1x_3-Ebene.



8.5 Lage von Punkten, Geraden und Ebenen

8.5.1 Lage eines Punktes und einer Geraden

Liegt der Punkt auf der Geraden?

Der Ortsvektor $\vec{p}$ des Punktes P muss mit der Parameterdarstellung der Geraden g gleichgesetzt werden: $\vec{p} = \vec{u} + t \cdot \vec{v}$.

- Hat die Gleichung eine Lösung für t, so liegt der Punkt auf der Geraden.
- Hat die Gleichung keine Lösung für t, so

liegt der Punkt nicht auf der Geraden.

Beispiel

$$P(0|1|4) \text{ und } \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0{,}5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0{,}5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 0 &= 3 + t && \rightarrow t = \text{-}3 \\ 1 &= 3 + 0{,}5t && \rightarrow t = \text{-}4 \\ 4 &= 4 + 2t && \rightarrow t = 0 \end{aligned}$$

Widerspruch $\rightarrow$ P liegt nicht auf der Geraden.

Welchen Abstand hat Punkt *P* von der Geraden?

1. Es muss eine Hilfsebene E senkrecht zur Geraden g und durch Punkt P erstellt werden. Dazu wird der Ortsvektor $\vec{p}$ von Punkt P als Stützvektor der Ebene genutzt. Der Richtungsvektor $\vec{v}$ der Geraden g wird als Normalenvektor genutzt.
2. Anschließend muss der Schnittpunkt S (hier auch Lotfußpunkt genannt) der Geraden g mit der Ebene E bestimmt werden (siehe Abschnitt „Schneidet die Gerade die Ebene?“ auf Seite 45).
3. Als letzter Schritt ist der Abstand von Schnittpunkt S und Punkt P zu bestimmen.

Beispiel

$$P(7|5|5) \text{ und } \vec{x} = \begin{pmatrix} \text{-}9 \\ 18 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ \text{-}8 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$E : \left(x - \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ \text{-}8 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$$

$$E : 6x_1 - 8x_2 + 3x_3 = 17$$

$g \cap E$:

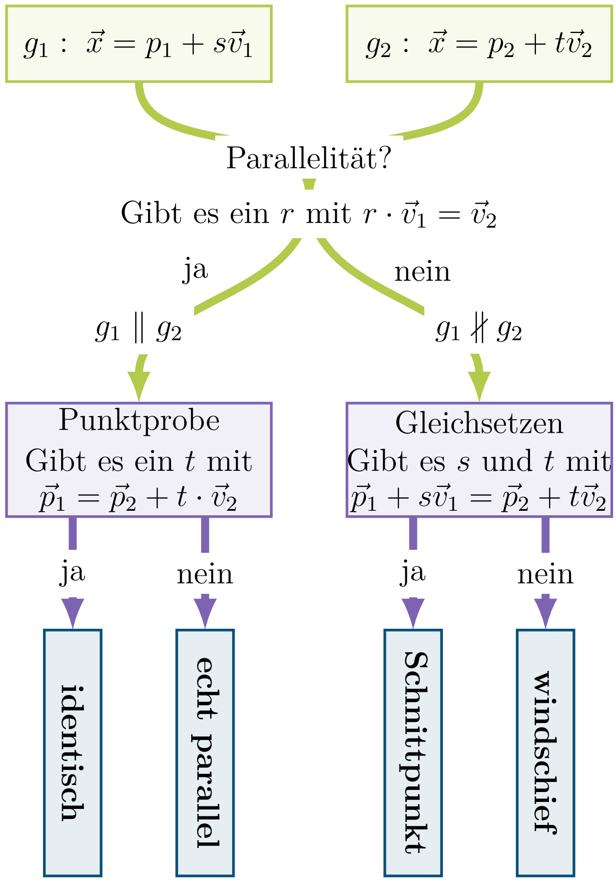
$$6(\text{-}9 + 6t) - 8(18 - 8t) + 3(\text{-}1 + 3t) = 17$$

$$\rightarrow t = 2$$

8.5.2 Lage zweier Geraden

Schneiden sich die beiden Geraden?

1. Es muss getestet werden, ob die Richtungsvektoren Vielfache voneinander sind.
   - Sind die Richtungsvektoren Vielfache voneinander, so muss mit der Punktprobe getestet werden, ob der Aufpunkt des Stützvektors der einen Geraden auf der anderen Geraden liegt.
     - Trifft dies zu, so sind die beiden Geraden identisch.
     - Trifft dies nicht zu, so sind die beiden Geraden echt parallel.
   - Sind die Richtungsvektoren keine Vielfachen voneinander, so wird mit Punkt zwei fortgefahren.
2. Die Geradengleichungen sind gleichzusetzen – es ergibt sich ein Lineares Gleichungssystem mit drei Gleichungen.
3. Mit zwei Gleichungen ist je eine Lösung für die beiden Variablen zu ermitteln.
4. Diese Lösungen müssen in der verbleibenden Gleichung überprüft werden (verpflichtend!).
   - Gibt es für beide Variablen eine eindeutige Lösung, so gibt es einen Schnittpunkt, den man durch Einsetzen einer der Lösungen in die entsprechende Geradengleichungen bestimmen kann (evtl. die andere Lösung in Kombination mit der anderen Geradengleichung als Probe nutzen).
   - Kommt es zum Widerspruch und die Richtungsvektoren sind keine Vielfachen voneinander, so gibt es keinen Schnittpunkt und die Geraden sind windschief.



Beispiel

$$g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 0 + 1s &= 1 + 2t \\ 1 + 2s &= 3 + 1t \\ 2 &= 2 + t \end{aligned}$$

Aus der dritten Gleichung ergibt sich $t = 0$ und damit aus der zweiten Gleichung $s = 1$, was beides in der ersten Gleichung zu keinem Widerspruch führt. Die Geraden schneiden sich also im Schnittpunkt $S(1|3|2)$ ($t = 0$ in g_2 eingesetzt).

Welchen Abstand haben die beiden parallelen Geraden?

Da die beiden Geraden parallel sind, ist der Abstand eines beliebigen Punktes auf der einen Geraden zur anderen Geraden immer gleich. Somit kann mit einem beliebigen Punkt auf der einen Geraden (meist der Aufpunkt des Stützvektors) wie in Abschnitt „Welchen Abstand hat Punkt P von der Geraden?“ auf Seite 42 fortgefahren werden.

Welchen Abstand haben die beiden windschiefen Geraden?

Zunächst wird mit der Parameterform der Geraden g und dem Richtungsvektor der Geraden h eine Hilfsebene E in Koordinatenform erstellt. g liegt dann in dieser Ebene, h liegt parallel zu ihr. Anschließend muss der Abstand der Geraden h zur Ebene E bestimmt werden. Siehe dazu Abschnitt „Welchen Abstand hat die Gerade von der Ebene?“ auf Seite 46.

Beispiel

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix};$$

$$h : \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$E : \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$E : 6x_1 + 9x_2 + 2x_3 = 113$$

In welchem Winkel schneiden sich die beiden Geraden?

Zunächst muss überprüft werden, ob die beiden Geraden sich tatsächlich schneiden (siehe Abschnitt „Schneiden sich die beiden Geraden?“ auf Seite 42). Ist dies der Fall, so muss der Winkel zwischen den Richtungsvektoren bestimmt werden (siehe auch Abschnitt 8.1.3). Sind $\vec{a}$ und $\vec{b}$ die beiden Richtungsvektoren der Geraden, so gilt

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} .$$

Es muss nun also das Skalarprodukt der beiden Vektoren durch das Produkt der Beträge der Vektoren geteilt werden, wodurch man den Kosinus des gesuchten Winkels erhält.

Beispiel

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{26} \quad \text{und} \quad |\vec{b}| = \sqrt{43}$$

$$\begin{aligned} \cos(\alpha) &= \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \\ &= \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}}{\sqrt{26} \cdot \sqrt{43}} \\ &= \frac{32}{\sqrt{1118}} \qquad |\arccos(...) \\ \alpha &= \arccos\left(\frac{32}{\sqrt{1118}}\right) \\ &\approx 0{,}2942 \approx 16{,}86° \end{aligned}$$

8.5.3 Lage eines Punktes und einer Ebene

Liegt der Punkt in der Ebene?

Mit der Punktprobe testen, ob der Punkt P in der Ebene E liegt (Koordinaten des Punktes in die Ebenengleichung einsetzen). Ergibt sich kein Widerspruch, so liegt der Punkt in der Ebene.

Beispiel

$$E : 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 19 \quad \text{und} \quad P(2|1|3)$$
$$4 \cdot 2 + 5 \cdot 1 + 2 \cdot 3 = 19$$

$\rightarrow$ Kein Widerspruch: P liegt in E

Welchen Abstand hat der Punkt von der Ebene?

Hesse'sche Normalenform

Mithilfe der Hesse'schen Normalenform lässt sich der Abstand eines Punktes P zu einer Ebene E relativ leicht bestimmen.

Für den Abstand d eines Punktes $R(r_1|r_2|r_3)$ von der Ebene E gilt:

$$d(E,r) = |(\vec{r} - \vec{p}) \cdot \vec{n_0}|$$

Sei $n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = b$, so gilt:

$$d(E,r) = \left| \frac{n_1r_1 + n_2r_2 + n_3r_3 - b}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}} \right|$$

Um den Abstand zu bestimmen, muss nur noch in eine der Gleichungen eingesetzt werden.

Beispiel

$$E : 2x_1 - 11x_2 + 10x_3 = 20$$
$$P(4|\text{-}22|22)$$

$$\begin{aligned} d(E,P) &= \left| \frac{8 + 242 + 220 - 20}{\sqrt{225}} \right| \\ &= \frac{400}{15} = 26{,}\overline{6} \end{aligned}$$

Hilfsgerade

Eine zweite Möglichkeit, den Abstand zu bestimmen, ist der Weg über eine Hilfsebene.

1. Mithilfe des Normalenvektors der Ebene als Richtungsvektor und des Ortsvektors des Punktes als Stützvektor ist eine Hilfsgerade zu erstellen. Diese liegt nun senkrecht zur Ebene und geht durch den Punkt.
2. Nun muss der Schnittpunkt (in diesem Fall auch Lotfußpunkt genannt) der Ebene mit der Geraden bestimmt werden (siehe Abschnitt „Schneidet die Gerade die Ebene?“ auf Seite 45).
3. Anschließend wird der Abstand des Punktes zum Schnittpunkt bestimmt.

Beispiel

$$E: 3x_2 + 4x_3 = 0 \text{ und } P(3|-1|7)$$

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$E \cap g:$$

$$\begin{aligned} 3(\text{-}1 + 3r) + 4(7 + 4r) &= 0 \\ \text{-}3 + 9r + 28 + 16r &= 0 \\ 25r + 25 &= 0 \qquad |:25 \\ r + 1 &= 0 \qquad |\text{-}1 \\ r &= \text{-}1 \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{SP} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \rightarrow |\overrightarrow{SP}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

8.5.4 Lage einer Ebene und einer Geraden

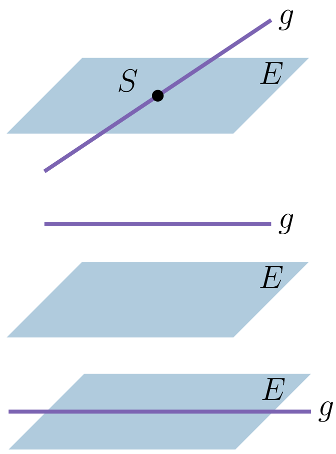
Schneidet die Gerade die Ebene?

Eine Gerade g und eine Ebene E können auf drei unterschiedliche Weisen zueinander liegen:

a) g schneidet E

b) g ist parallel zu E

c) g liegt in E



1. Die Ebenengleichung muss zunächst in die Koordinatenform umgeformt werden.
2. Anschließend muss die Geradengleichung in die Ebenengleichung eingesetzt werden.
3. Diese Gleichung ist nach t aufzulösen.
   a) Ergibt sich genau eine Lösung, so schneidet die Gerade die Ebene.
   b) Ergibt sich keine Lösung, so ist die Gerade parallel zur Ebene.
   c) Ergeben sich unendlich viele Lösungen, so liegt die Gerade in der Ebene.
4. Ergab sich mit diesem Verfahren ein Schnittpunkt, so ist die Lösung für t in die Geradengleichung einzusetzen, um den Schnittpunkt zu erhalten.

Beispiel

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$E: 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = \text{-}12$$

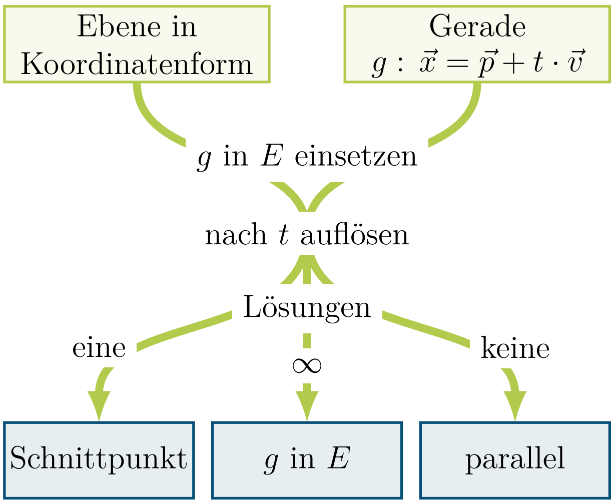
$$g \cap E:$$

$$\begin{aligned} 2(4+t)+4(6+2t)+6(2+3t) &= \text{-}12 \\ 8+2t+24+8t+12+18t &= \text{-}12 \\ 44+28t &= \text{-}12 \\ 28t &= \text{-}56 \\ t &= \text{-}2 \end{aligned}$$

t in g einsetzen:

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + (\text{-}2) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ \text{-}4 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow S(2|2|\text{-}4)$



Welchen Abstand hat die Gerade von der Ebene?

Da die Gerade in diesem Fall parallel zur Ebene liegt, entspricht der Abstand eines beliebigen Punktes auf der Geraden zur Ebene dem Abstand von Gerade und Ebene. Es kann nun also mit einem begliebigen Punkte der Geraden (meist der Aufpunkt des Stützvektors) wie in Abschnitt „Welchen Abstand hat der Punkt von der Ebene?“ auf Seite 44 verfahren werden.

In welchem Winkel schneidet die Gerade die Ebene?

Zunächst muss überprüft werden, ob die Gerade die Ebene tatsächlich schneidet (siehe Abschnitt „Schneidet die Gerade die Ebene?“ auf Seite 45). Ist dies der Fall, so muss der Winkel zwischen dem Richtungsvektor der Geraden und dem Normalenvektor der Ebene bestimmt werden (siehe auch Abschnitt 8.1.3). Ist $\vec{r}$ der Richtungsvektor und $\vec{n}$ der Normalenvektor, so gilt

$$\sin(\alpha) = \frac{\vec{r} \cdot \vec{n}}{|\vec{r}| \cdot |\vec{n}|} \ .$$

Es muss nun also das Skalarprodukt der beiden Vektoren durch das Produkt der Beträge der Vektoren geteilt werden, wodurch man den Sinus des gesuchten Winkels erhält.

Beispiel

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$E: 3x_1 + 4x_2 + 6x_3 = -12$$

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{r}| = \sqrt{14} \quad \text{und} \quad |\vec{n}| = \sqrt{61}$$

$$\begin{aligned} \sin(\alpha) &= \frac{\vec{r} \cdot \vec{n}}{|\vec{r}| \cdot |\vec{n}|} \\ &= \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{66}} \\ &= \frac{26}{\sqrt{854}} \qquad |\arcsin(...) \\ \alpha &= \arcsin\left(\frac{26}{\sqrt{854}}\right) \\ &\approx 1{,}0967 \approx 62{,}84^\circ \end{aligned}$$

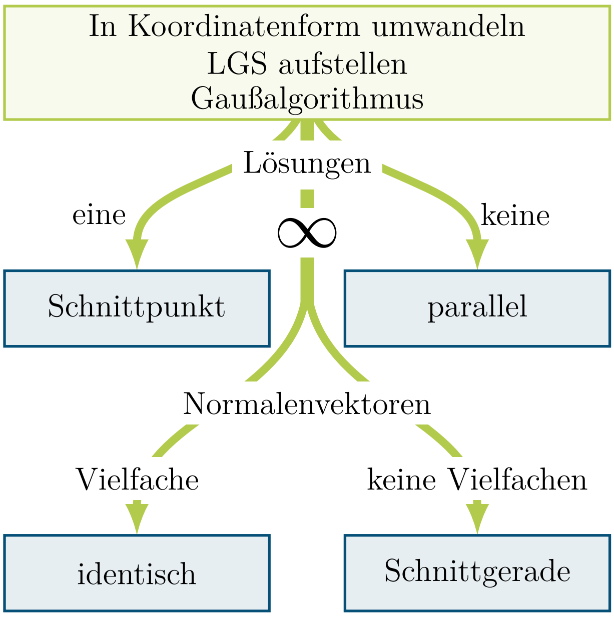
8.5.5 Lage zweier Ebenen

Schneiden sich die Ebenen?

Um zu testen, ob zwei Ebenen sich schneiden, müssen die Ebenengleichungen in die Koordinatenform umgewandelt werden. Hieraus muss ein Lineares Gleichungssystem mit zwei Gleichungen aufgestellt werden, das mit dem Gaußverfahren gelöst werden kann (siehe Kapitel 9 auf Seite 49). Ergibt sich ein Widerspruch, so sind die Ebenen parallel. Ergibt sich kein Widerspruch und die Normalenvektoren der Ebenen sind Vielfache voneinander, so sind die Ebenen identisch. Ergibt sich kein Widerspruch und die Normalenvektoren der Ebenen sind auch keine Vielfachen voneinander, so ergibt sich eine Schnittgerade.

Sollen drei oder mehr Ebenen auf Schnittpunkt/Schnittgerade getestet werden, so ergibt sich zusätzlich die Möglichkeit, dass das LGS genau eine Lösung hat. Dies bedeutet, dass es sich um einen Schnittpunkt handelt.

Für weitere Informationen zur geometrischen Interpretation eines Linearen Gleichungssystems, siehe Kapitel 9.1 auf Seite 50.



Welchen Abstand haben die beiden Ebenen?

Da die beiden Ebenen parallel sind, ist der Abstand überall gleich, weshalb der Abstand eines beliebigen Punktes einer der Ebenen (meist der Aufpunkt des Stützvektors) von der anderen Ebene berechnet werden kann. Siehe dazu „Welchen Abstand hat der Punkt von der Ebene?“ auf Seite 44.

In welchem Winkel schneiden sich die beiden Ebenen?

Da der Winkel zwischen den beiden Normalenvektoren dem Winkel zwischen den beiden Ebenen entspricht, kann dieser Winkel wie in Abschnitt „In welchem Winkel schneiden sich die beiden Geraden?“ auf Seite 43 beschrieben bestimmt werden, nachdem überprüft wurde, dass die Ebenen sich tatsächlich schneiden (siehe Abschnitt „Schneiden sich die beiden Ebenen?“ auf Seite 47).

8.6 Spiegelungen

8.6.1 Punktspiegelung

Für die Spiegelung eines Punktes P an einem Punkt Z gilt:

$$\vec{p'} = \vec{p} + 2 \cdot \overrightarrow{PZ}$$

Hierbei ist $\vec{p}$ der Ortsvektor des Punktes P usw.

(Addieren des Doppelten des Verbindungsvektors von P nach Z)

Beispiel

$$P(1|0|2) \qquad Z(2|3|0)$$

$$\overrightarrow{P'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow P'(3|6|-2)$$

8.6.2 Spiegelung an einer Geraden

- Bestimmung des Lotfußpunktes L (Punkt mit geringstem Abstand zur Gerade, Verbindungsvektor steht orthogonal zur Gerade)
- Punktspiegelung von P an L

Beispiel

$P(3|3|0)$

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -9 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Allgemeinen Punkt auf der Geraden g und allgemeinen Verbindungsvektor $\overrightarrow{PL_t}$ bestimmen

$$L_t(-2 + t|-4 - 2 \cdot t|-9 + 2 \cdot t)$$

$$\overrightarrow{PL_t} = \begin{pmatrix} -5 + t \\ -7 - 2 \cdot t \\ -9 + 2 \cdot t \end{pmatrix}$$

In Orthogonalitätsbedingung einsetzen:

$$\begin{pmatrix} -5 + t \\ -7 - 2 \cdot t \\ -9 + 2 \cdot t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$

$$-5 + t + 14 + 4 \cdot t - 18 + 4 \cdot t = 0$$

$$-9 + 9 \cdot t = 0 \rightarrow t = 1$$

$$L_1(-1|-6|7)$$

Nun wie bei Punktspiegelung verfahren:

$$\vec{P'} = \vec{P} + 2 \cdot \overrightarrow{PL_1}$$

8.6.3 Spiegelung an einer Ebene

- Bestimmung des Lotfußpunktes L
- Zum Ortsvektor von P wird das Doppelte des Verbindungsvektors von P nach L

Um eine Gerade zu spiegeln, kann man zwei beliebige Punkte spielen und erstellt dann die neue Geradengleichung aus diesen Punkten. Eine Ebene benötigt drei unterschiedliche Punkte.

9 Gaußverfahren

Das Gaußverfahren benötigt man um lineare Gleichungssysteme zu lösen.

Das Ziel ist es, dass am Ende in einer Zeile (Gleichung) nur noch eine Variable, in einer weiteren nur zwei Variablen vorkommen. Dieses Ziel erreicht man indem man die Zeilen (oder Vielfache davon) subtrahiert oder addiert um eine neue Zeile zu erzeugen, welche weniger Variablen enthält.

Beispiel

$$\begin{aligned} 1x + 2y + 2z &= 3 && A \\ 2x + 3y + 1z &= 7 && B \\ 3x - 2y + 1z &= \text{-}2 && C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1x + 2y + 2z &= 3 && A \\ 2x + 3y + 1z &= 7 && B \\ 0x - 8y - 5z &= \text{-}11 && D = C - 3 \cdot A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1x + 2y + 2z &= 3 && A \\ 0x - 1y - 3z &= 1 && E = B - 2 \cdot A \\ 0x - 8y - 5z &= \text{-}11 && D \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1x + 2y + 2z &= 3 && A \\ 0x - 1y - 3z &= 1 && E \\ 0x + 0y + 19z &= \text{-}19 && F = D - 8 \cdot E \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$x = 1$, $y = 2$, und $z = \text{-}1$ also
$\mathbb{L} = \{(1{,}2{,}\text{-}1)\}$

Es muss jedoch nicht immer eine Lösung herauskommen, so kann es auch zu einem Widerspruch kommen und somit keine Lösung geben. Es kann jedoch auch vorkommen, dass es mehr als eine Lösung gibt, dann sind es immer unendlich viele Lösungen.

Beispiel

$$\begin{aligned} 1x - 2y + 3z &= 4 && A \\ 3x + 1y - 5z &= 5 && B \\ 2x - 3y + 4z &= 7 && C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1x - 2y \ + 3z &= 4 && A \\ 7y - 14z &= \text{-}7 && D = B - 3 \cdot A \\ y - \ \ 2z &= \text{-}1 && E = C - 2 \cdot A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1x - 2y \ + 3z &= 4 && A \\ 7y - 14z &= \text{-}7 && D = B - 3 \cdot A \\ 0 &= 0 && D = D - 7 \cdot E \end{aligned}$$

Die letzte Zeile gilt für jeden Wert der Variablen, es gibt also unendlich viele Lösungen (wäre hier ein Widerspruch entstanden, so gäbe es keine Lösung).

Es gibt also nur 2 Gleichungen für 3 Variable! Man kann nun jedoch 2 Variablen in Abhängigkeit der dritten angeben:

$$y = \text{-}1 + 2 \cdot z \qquad x = 2 + z$$

Setzt man nun $z = t$ so ist die Lösungsmenge also
$\mathbb{L} = \{(2 + t;\text{-}1 + 2t{,}t)\}$

9.1 Geometrische Interpretation

Ein Lineares Gleichungssystem (LGS) mit drei Variablen kann man auch geometrisch im dreidimensionalen Raum interpretieren. Dabei sind folgende Situationen möglich:

keine Lösung die Ebenen schneiden sich nicht, sie sind also echt parallel zueinander oder schneiden sich jeweils nur paarweise

eine Lösung die Ebenen schneiden sich in einem Punkt

unendlich Lösungen die Ebenen schneiden sich entweder in einer Geraden oder sie sind identisch, die erkennt man an den Normalenvektoren, sind sie Vielfache voneinander, so handelt es sich nur um eine Ebene, ansonsten um eine Schnittgerade

Beispiel

Die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{(2+t;\text{-}1+2t,t)\}$ lässt sich als Schnittgerade interpretieren. Schreibt man die Lösungsmenge in drei Zeilen ausführlich untereinander, so kann man die Geradengleichung ablesen.

$$\begin{array}{cc} 2 & +t\cdot 1 \\ \text{-}1 & +t\cdot 2 \\ 0 & +t\cdot 1 \end{array}$$

$$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix};\ t\in\mathbb{R}$$

Basiswissen Ebenen

Gerade & Punkt

$g: \vec{x} = \vec{p} + t \cdot \vec{u}$
$A(a_1|a_2|a_3)$

$\vec{p} = \vec{p}$

$\vec{u} = \vec{u}$
$\vec{v} = \vec{p} - \vec{a}$

Parametergleichung

$E: \vec{x} = \vec{p} + r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v} \quad r,s \in \mathbb{R}$

$\vec{p}$ Stützvektor
$\vec{u}$ und $\vec{v}$ Spannvektoren

$\vec{p} = \vec{a}$

$\vec{u} = \vec{b} - \vec{a}$
$\vec{v} = \vec{c} - \vec{a}$

3 Punkte $A,B\&C$

$A(a_1|a_2|a_3)$

$\vec{a} = \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$

Winkel zw. Ebene & Gerade

Winkel zwischen
Normalen- & Richtungsvektor

$$\sin(\alpha) = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{u}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{u}|}$$

$\vec{p}$ übernehmen

$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$

$$\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ u_3v_1 - u_1v_3 \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{pmatrix}$$

$\vec{p}$ einsetzen

Spurpunkte
S_1, S_2 & S_3

Darstellung

Spurpunkte einzeichnen
Spurgerade ergänzen
$S_1(s_1|0|0)$ usw.

Normalengleichung

$E: (\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = 0$

$\vec{p}$ Stützvektor
$\vec{n}$ Normalenvektor

$\vec{n}$ ablesen

P suchen

Koordinatengleichung

$E: n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = d$

$d = n_1p_1 + n_2p_2 + n_3p_3$

Spurpunkte (Schnittpunkte mit den Achsen) bestimmen

$\vec{p}$ einsetzen

LGS lösen

Winkel zwischen Ebenen

Winkel zwischen den
Normalenvektoren

$$\cos(\alpha) = \frac{|\vec{n_1} \cdot \vec{n_2}|}{|\vec{n_1}| \cdot |\vec{n_2}|}$$

Lage von Ebenen/Gerade

$x_1 = p_1 + r \cdot u_1$
$x_2 = p_2 + r \cdot u_2$
$x_3 = p_3 + r \cdot u_3$
in Koordinatengleichung einsetzen

Lage von Ebenen

eine Lösung → Schnittpunkt
Lösung mit einer Variable → Schnittgerade
Lösung mit zwei Variable → identisch
keine Lösung → keine Schnittmenge