Binärzahlen

In unserem gewohnten Stellenwertsystem, dem Dezimalsystem ist jeder Stelle eine Zehnerpotenz zugeordnet. Die Zahl 314 besteht somit aus $314 = 3\cdot 10^2 + 1\cdot 10^1 + 4\cdot 10^0$. Legt man jedoch einem Zahlensystem nicht die 10 als Basis zu Grunde, sondern die 2, so steht jede Stelle für eine Zweierpotenz. Die Darstellung der Null und Eins sind somit identisch. Da jedoch schon die zweite Stelle von links den Wert 2^1 repräsentiert wird die Zwei im Binärsystem 10_2 geschrieben. Die Indexzwei gibt dabei an, dass es sich das Binärsystem (Zweier- oder Dualsystem) handelt.

2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
1	0	0	1	1

$$10011_2 = 1\cdot 2^4 + 0\cdot 2^3 + 0\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0 = 16 + 2 + 1 = 19$$

Ein Verfahren zur Umrechnung von dezimaler Schreibweise in die binäre Darstellung, das sich auch leicht programmieren lässt, wird hier am Beispiel der Zahl 41 aufgezeigt:

Schritt 0:	41:2=	20 Rest 1
Schritt 1:	20:2=	10 Rest 0
Schritt 2:	10:2=	5 Rest 0
Schritt 3:	5:2 =	2 Rest 1
Schritt 4:	2:2 =	1 Rest 0
Schritt 5:	1:2 =	0 Rest 1

Die Rechenregeln und Vorschriften wie z.B. schriftliche Addition, Multiplikation usw. gelten auch im Binärsystem.

Aufgabe 1

Bilde sowohl das Produkt und die Summe aus 110011_2 und 101101. Rechne zuerst im Binärsystem und vergleiche danach mit der Darstellung im Dezimalsystem.

Berechne weiter:
a.) $10001_2 + 11110_2$ b.) $111_2 + 11001_2$
c.) $110_2 \cdot 1001_2$ d.) $1010_2 \cdot 1101_2$

Aufgabe 2

Führt die schriftliche Division 465:15 schrittweise durch und macht euch die Bedeutung eurer Schritte im Stellenwertsystem klar. Übertragt diese Bedeutung dann auf das Binärsystem und dividiert $1100_2 : 10_2$

Berechne weiter: $110_2 : 11_2$, $10110_2 : 10_2$, $10110_2 : 10_2$ und $11100_2 : 100_2$

Aufgabe 3

(Zusatz) Führt die schriftliche Division für 123:7 mit Rest schrittweise durch und macht euch die Bedeutung eurer Schritte im Stellenwertsystem klar. Übertragt diese Bedeutung dann auf das Binärsystem und dividiert $1011_2 : 11_2$

Berechne weiter: $101010_2 : 11_2$, $110101_2 : 101_2$ und $11110_2 : 11_2$

 pirmingohn@gmail.com

Hexadezimalzahlen

Ein Byte ist eine der wichtigsten Maßeinheiten in der Informatik. Beispielsweise geben wir Speichergrößen in Vielfachen von Bytes an, zum Beispiel Kilobyte, Megabyte, Gigabyte oder sogar Terabyte. Jedes Byte besteht aus 8 Bit (0 oder 1) und kann deshalb 256 verschiedene Kombinationen beinhalten – im Prinzip 256 verschiedene Binärzahlen von 0 bis 255. Diese sind jedoch aufgrund ihrer acht Stellen im Binärsystem sehr „sperrig“ zu schreiben. Um die Schreibweise – und damit auch den Austausch dieser Zahlen – zu vereinfachen, ist der Wechsel in ein anderes Stellenwertsystem von Vorteil: Man wandelt sie in Hexadezimalzahlen um, das sind Zahlen im 16er-System.

Die Stellen im Hexadezimalsystem bestehen somit von rechts nach links aus Vielfachen der Zahlen 16^0=1, 16^1=16, $16^2 = 256$, $16^3 = 4096$, usw. Als jeweilige Vielfache einer Stelle werden zunächst weiterhin die Ziffern 0 bis 9 verwendet. Um 10, 11, 12, 13, 14 oder 15 Einer anzeigen zu können, benötigt man jedoch noch sechs weitere Ziffern. Diese werden in numerisch aufsteigender Reihenfolge mit A, B, C, D, E und F bezeichnet. Die Zahl $D9_{16}$ bedeutet somit (von rechts nach links) 9 Einer + 13 Sechzehner, also 9+208=217.

Die Binärdarstellung der Zahl 11011001_2 ist im Dezimalsystem 217, im Hexadezimalsystem $D9_{16}$. Man spart sich also gegenüber dem Dezimalsystem eine Stelle. Das ist jedoch nicht der entscheidende Vorteil, wenn man sich überlegt, warum man nicht auf das uns so vertraute Dezimalsystem wechselt. Entscheidender ist die einfache Umrechnung zwischen den Binärzahlen und den Hexadezimalzahlen: Die Binärzahlen können ganz einfach in „Viererpäckchen“ unterteilt werden, um die zugehörige Hexadezimalzahl zu erzeugen. Im Beispiel werden aus 11011001_2 die beiden Viererpäckchen 1101 und 1001. Jedes für sich als Binärzahl interpretiert ergibt eine Zahl zwischen 0 und 16, hier sind 1101_2=13 und 1001_2=9. Die 13 wird im Hexadezimalsystem aber durch ein D dargestellt und schon hat man die Zahldarstellung D916 erhalten. Das ist deutlich einfacher als die Umrechnung ins Dezimalsystem!

Aufgabe 4

Fertige eine Tabelle mit drei Zeilen und 17 Spalten an. In die drei Zeilen der ersten Spalte schreibst du die Begriffe Dezimal, Binär und Hexadezimal von oben nach unten. Jetzt füllst du in die restlichen Spalten der obersten Zeile die Zahlen 0 bis 15 und vervollständigst danach die ganze Tabelle.

Aufgabe 5

Wandle in Hexadezimalzahlen um:

100111_2, 116, 111011101_2, 255, 801 und $1001010100110100101110 1_2$

Aufgabe 6

Wandle in Binärzahlen um: 19_{16}, 32_{16}, AA_{16}, $A1F_{16}$

Aufgabe 7

(Zusatz) Erkläre woran es liegt, dass die Vorgehensweise mit den Viererpäckchen bei der Umwandlung zwischen Binär- und Hexadezimalzahlen funktioniert.

Welche weiteren Systeme würden ebenfalls leicht “umrechenbar“ sein?

Aufgabe 8

(Zusatz) Such dir ein weiteres neues System aus (zwischen Binär- und Hexadezimalsystem) aus und überprüfe dort ebenfalls die Rechenoperationen an geeigneten Beispielen.