Aufgabe 1 2 VP

Bilde die erste Ableitung der Funktion f mit $f(x) = (x^2 + 5) \cdot e^{-2x}$

Aufgabe 2 1 VP

Bestimme eine Stammfunktion der Funktion f mit $f(x) = 4\sin(2x)$

Aufgabe 3 2 VP

Löse die Gleichung $2e^x - \dfrac{4}{e^x} = 0$

Aufgabe 4 5 VP

Eine Funktion f hat folgende Eigenschaften:

- $f(2) = 1$
- $f'(2) = 0$
- $f''(4) = 0$ und $f'''(4) \neq 0$
- für $x \to \pm\infty$ gilt $f(x) \to 5$

Beschreibe für jede dieser vier Eigenschaften, welche Bedeutung sie für den Graph von f hat. Skizziere einen möglichen Verlauf des Graphen.

Aufgabe 5 4 VP

Die Gerade g verläuft durch die Punkte $A(1|-1|3)$ und $B(2|-3|0)$. Die Ebene E wird von g orthogonal geschnitten und enthält den Punkt $C(4|3|-8)$. Bestimme den Schnittpunkt S von E und g.
Untersuche ob S zwischen A und B liegt.

Aufgabe 6 4 VP

Gegeben sind die beiden Ebenen

$$E_1 : 2x_1 - 2x_2 + x_3 = -1 \quad \text{und} \quad E_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}; \; s,t \in \mathbb{R}$$

Zeige, dass die beiden Ebenen parallel zueinander sind.
Die Ebene E_3 ist parallel zu E_1 und E_2 und hat von beiden Ebenen denselben Abstand. Bestimme eine Gleichung der Ebene E_3.

Aufgabe 7 2 VP

Auf einem Tisch liegen verdeckt fünf Spielkarten, unter denen sich zwei Joker befinden. Hilde und Franz decken abwechselnd je eine Karte auf. Es gewinnt, wer zuerst einen Joker zieht. Hilde beginnt das Spiel. Bestimme die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:

A Franz gewinnt.

B Hilde gewinnt.

pirmingohn@gmail.com

1 Analysis

Aufgabe 8 (2+4+3+3+3) VP

Der Querschnitt eines 50 Meter langen Bergstollens wird beschrieben durch die x-Achse und den Graphen der Funktion f mit

$$f(x) = 0{,}02x^4 - 0{,}82x^2 + 8; \;\; -4 \leq x \leq 4 \text{ (}x\text{ und }f(x)\text{ in Meter}$$

a) An welchen Stellen verlaufen die Wände des Stollens am steilsten?
Welchen Winkel schließen die Wände an diesen Stellen mit der Horizontalen ein?

b) Nach einem Wassereinbruch steht das Wasser im Stollen 1,7 m hoch. Wie viel Wasser befindet sich in dem Stollen?

c) Für die Länge s eines Kurvenstücks des Graphen von f im Bereich $a \leq x \leq b$ gilt:

$$s = \int_2^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\mathrm{d}x$$

Bestimme mit dieser Formel die Länge des Kurvenstücks, das im Querschnitt die Stollenwand beschreibt. Um wie viel Prozent ist der Flächeninhalt der Wandfläche des Stollens größer als der Flächeninhalt seiner Bodenfläche?

d) Im Stollen soll auf 6 m Höhe eine Lampe aufgehängt werden. Aus Sicherheitsgründen muss die Lampe mindestens 1,4 m von den Wänden entfernt sein. Überprüfe, ob dieser Abstand eingehalten werden kann.

e) Ein würfelförmiger Behälter soll so in den Stollen gestellt werden, dass er auf einer seiner Seitenflächen steht. Wie breit darf der Behälter höchstens sein?

Aufgabe 9 (2+3) VP

Für jedes $t \neq 0$ ist eine Funktion f_t gegeben durch $f_t(x) = (x-1) \cdot \left(1 - \frac{1}{t}e^x\right)$.

a) Bestimme denjenigen Wert von t exakt, für den der Graph von f_t die y-Achse im Punkt $S(0|e)$ schneidet.

b) Für welche Werte von t besitzt f_t mehr als eine Nullstelle?

2 Analytische Geometrie

Aufgabe 10 (4+2,5+3,5) VP)

Ein Würfel besitzt die Eckpunkte $O(0|0|0)$, $P(6|0|0)$, $Q(0|6|0)$ und $R(0|0|6)$. Gegeben ist außerdem die Ebene $E:\, 3x_2 + x_3 = 8$.

a) Stelle den Würfel und die Ebene E in einem Koordinatensystem dar.
Bestimme den Abstand von E zur x_1-Achse.

Die Ebene E gehört zu einer Ebenenschar. Diese Schar ist gegeben durch $E:\, 3x_2 + x_3 = a;\;\; a \in \mathbb{R}$.

b) Für welche Werte von a hat der Punkt $S(6|6|6)$ den Abstand 10 von der Ebene E_a?

c) Welche Lage haben die Ebenen der Schar zueinander?
Für welche Werte von a hat die Ebene E_a gemeinsame Punkte mit dem Würfel?

3 Stochastik

Aufgabe 11 (2+2+1,5+4,5) VP

Ein Glücksrad besteht aus drei farbigen Sektoren mit den Mittelpunktswinkeln 180° (rot), 90° (gelb) und 90° (blau).

a) Das Glücksrad wird zehn Mal gedreht. Berechne die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:

A Die Farbe Blau tritt genau vier Mal auf.

B Die Farbe Blau tritt mindestens vier Mal auf.

b) Wie oft muss man das Glücksrad mindestens drehen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von über 99% mindestens einmal die Farbe Blau zu bekommen?

Eine Klasse setzt dieses Glücksrad beim Schulfest ein, wobei folgende Spielregeln gelten: Für einen Einsatz von einem Euro darf ein Spieler das Glücksrad drei Mal drehen. Wenn drei Mal dieselbe Farbe erscheint, erhält er zwei Euro zurück; wenn drei verschiedene Farben erscheinen, bekommt er nichts ausbezahlt; in allen anderen Fällen erhält er seinen Einsatz zurück.

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit macht ein Spieler Verlust, wenn er dieses Spiel einmal spielt?

d) Die Klasse will im nächsten Jahr zwar die Spielregeln beibehalten, aber durch Veränderung der Sektorengrößen ihre Gewinnwahrscheinlichkeit erhöhen. Dabei soll der rote Sektor weiterhin doppelt so groß sein wie der gelbe. Es sei p die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer Drehung „gelb“ erscheint. Für welchen Wert von p ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Spieler Verlust macht, am größten?

Korrekturhinweis: Die Wahlteilaufgaben Analysis und ana. Geometrie, sowie alle Pflichtteilaufgaben, bis auf die Stochastikaufgabe stammen aus den „Musteraufgaben 2017 & 2018“ deren Musterlösungen man auch auf mathe-aufgaben.com finden kann. Die Stochastikaufgaben findet man dort ebenfalls jedoch bei den Musteraufgaben für 2019.