5 Lineare Gleichungssysteme

In einer linearen Gleichung kommt jede Variable nur linear vor (und z.B. nicht quadratisch). Die einfachste Variante ist eine Geradengleichung der Form $y = 2x + 3$ bzw. allgemeiner $y = mx + c$.

5.1 Schneiden zweier Geraden

Eine Gerade beschreibt unendliche viele Punkte (Koordinatenpaare). Das heißt wir finden zu jedem beliebigem x ein ganz bestimmten y-Wert. Wenn man aber nun zwei Geraden hat, so merkt man, dass diese sich in genau einem Punkte schneiden, parallel oder sogar identisch sind. Andere Möglichkeiten findet man nicht im 2D-Raum.

Eine Gleichung hat eine Lösungsmenge, bestehend aus einzelnen Zahlen, zwei Geraden die man schneidet bilden ein lineares Gleichungssystem mit 2 Variablen (meistens x & y) und zwei (Geraden-) Gleichungen. Ihre Lösungsmenge besteht aus den Schnittpunkten der Geraden; also aus Zahlenpaaren (x;y), statt Zahlen.

Beispiel

$f(x) = x - 1$ und $g(x) = \frac{1}{2}x$, bzw.
$y = x - 1$ und $y = \frac{1}{2}x$

5.1.1 Einsetzen

Man löst eine der Gleichungen nach x auf ($x = y + 1$) und setzt diese dann in die andere Gleichung ein und löst nach y auf:

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2}x \\ y &= \frac{1}{2}(y+1) \\ y &= \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}) && \left|-\frac{1}{2}y\right. \\ \frac{1}{2}y &= \frac{1}{2} && |\cdot 2 \\ y &= 1 \end{aligned}$$

Nun setzt man $y = 1$ in eine der beiden Gleichungen ein $1 = x - 1$ und löst nach x auf, so bekommt man $x = 2$. Die Lösungsmenge wäre also $\mathbb{L} = \{(2/1)\}$.

5.1.2 Gleichsetzen

Beide Gleichungen sind ja bereits nach y aufgelöst, wir können sie also gleich setzen und nach x auflösen

$$\begin{aligned} x - 1 &= \frac{1}{2}x && |-x \\ -1 &= -\frac{1}{2}x && |\cdot(-2) \\ 2 &= x \end{aligned}$$

$x = 2$ in einer der Gleichungen einsetzen und wir kommen auf das selbe Ergebnis wie oben

5.1.3 Addieren & Subtrahieren

Man kann Gleichungen addieren, subtrahieren oder mit Faktoren multiplizieren. Ziel ist es durch solche elementare Umformungen eine Variable (Unbekannte) zu eliminieren. Wir multiplizieren die zweite Gleichung mit (-2) und addieren die Gleichungen dann auf.

$$\begin{aligned} y &= x - 1 && |\cdot(1) \\ + \quad y &= \frac{1}{2}x && |\cdot(-2) \\ &\text{-----------} \\ -y &= -1 \end{aligned}$$

Ab hier analog zu „einsetzen“.

Drei mögliche Ergebnisse

- Es gibt einen Punkt in der Lösungsmenge z.B. $\mathbb{L} = \{(2;1)\}$, in diesem Fall schneiden sich die zwei Geraden in genau diesem Punkte
- Es gibt unendlich viele Lösungen, dann sind die Geraden identisch (sie liegen aufeinander) und beide Geradengleichungen sind eigentlich gleich. Somit wäre die Geradengleichung selbst die Lösung
$\mathbb{L} = \{(x;y) | mx + b\}$
- Es gibt keine Lösung, somit sind die Geraden parallel (selbe Steigung m). $\mathbb{L} = \{\,\}$

5.2 Gauß'sche Eliminationsverfahren

Nicht immer haben wir den Fall, dass ein lineares Gleichungssystem aus zwei Gleichungen mit zwei Variabeln besteht. Es kann auch deutlich komplexer sein. In diesem Kapitel wird das Gaußsche Eliminationsverfahren an Gleichungssystemen mit drei Gleichungen und drei Unbekannten (Variablen) erklärt (Das Vorgehen bei größeren LGS ist jedoch gleich).

Zuerst führen wir eine vereinfachte Notation ein, sie erspart uns vor allem Schreibaufwand. Man nennt diese Art der Darstellung eine Matrix (Plural: Matrizen). Haben wir zum Beispiel folgendes LGS:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 6 \\ y + z &= 5 \\ 2x - y + z &= 3 \end{aligned}$$

So schreiben wir die Koeffizienten (Vorfaktoren vor den Variablen) zeilenweise ab und erhalten so die sogenannte „Koeffizientenmatrix“:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Nimmt man auch die absoluten Beträge dazu, ergibt dies die „absolut Matrix“:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Die erste Spalte steht also für , die zweite Spalte für y,usw.. Unser Ziel ist es diese Zeilen nun so um zu formen, dass am Ende in einer Zeile nur noch in der letzten (absolut) Spalte und einer weiteren Spalte ein Eintrag steht. Beziehungsweise wollen wir eine sogenannte „obere Dreiecksmatrix“ erzeugen, das heißt alle Einträge unterhalb der Diagonaleinträge sind Null. Um dies zu erreichen darf man folgende Umformungen verwenden:

erlaubte Umformungen

- Vertauschen von Gleichungen
- Multiplizieren einer Gleichung mit einer von Null verschiedenen Zahl
- Ersetzen einer Gleichung durch die Summe aus dieser und einer anderen Gleichung

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Im ersten Schritt versuchen wir in zwei beliebigen Zeilen in der x-Spalte die Null zu bekommen, in diesem Fall ist die zweite Zeile bereits OK. Damit wir jedoch in der dritten Zeile diese Null bekommen müssen wir das zweifache der ersten Zeile abziehen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & -1 & -9 \end{pmatrix}$$

nun müssen wir in einer der unteren beiden Zeilen in der zweiten Spalte eine Null erzeugen, ohne dabei in der x-Spalte die Null zu verändern.
Wir müssen also die zweite und die dritte Zeile miteinander verrechnen.
Wir rechnen als einmal die dritte Zeile plus drei mal die zweite Spalte:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Nun könnten wir die Matrix wieder in Gleichungen übersetzten und sie von unten nach oben lösen, so ergibt die dritte Zeile:
$2z = 6$, also $z = 3$,
dies kann man in die Gleichung der zweiten Zeile einsetzen und kommt so zu dem Ergebnis:
$x = 1$, $y = 2$, $z = 3$.

Man kann jedoch auch mit den Matrizen weiter arbeiten und versuchen nur noch Einsen in den Diagonaleinträgen zu haben und ansonsten alles außer den absolut Beträgen zu eliminieren. Wir teilen also die dritte Zeile durch 2, und ziehen diese von der ersten und der zweiten Zeile ab:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Ziehen wir noch die zweite von der ersten Zeile ab:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Jetzt können nun das obige Ergebnis ganz leicht ablesen: $x = 1, y = 2, z = 3$ bzw.: $\mathbb{L} = \{(1/2/3)\}$.

Lineare Gleichungssysteme

Pirmin Gohn
Hans-Thoma-Gymnasium, Lörrach

„Es gibt Dinge, die den meisten Menschen unglaublich erscheinen, die nicht Mathematik studiert haben.“

Vladimier Igorewitsch Arnold