Klassische Aufgaben

Lösung zu Abi'04 - PTV

Punktprobe: $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ aus **allen** 3 Zeilen folgt $t = 1$, also liegt A auf g.

Richtungsvektor von g: $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$; Normalenvektor von E: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

Da die $\vec{n}$ und $\vec{u}$ Vielfache voneinander sind sind g und E orthogonal zueinander.

Es wird der Lotfußpunkt gesucht, dazu brauchen wir eine Hilfsgerade h die orthogonal zu E ist und durch A geht. Die Gerade g erfüllt bereits diese Eigenschaften (*ansonsten $\overrightarrow{AO}$ als Stützvektor und $\vec{n}$ als Richtungsvektor*)! Wir suchen also den Schnittpunkt von g und E und setzen daher die Zeilen von g in E ein:

$$4(1 + 2t) - 2(1 - t) + 4 \cdot 2t = 11 \quad \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$$

Setzt man $t = \frac{1}{2}$ nun in die Geradengleichung ein so ist $P(2|\frac{1}{2}|1)$ der gesuchte Punkt.

Lösung zu Abi'05 - PTV

Orsvektor und Richtungsvektor der Geraden werden übernommen, den zweiten Spannvektor bekommt man als Verbindungsvektor von A und dem Geradenpunktes $G(3|3|1)$. Also ist $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $r,s \in \mathbb{R}$.

$\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \\ 12 \end{pmatrix}$ d.h. der Ansatz lautet $E: -4x_1 - 8x_2 + 12x_3 = a$ mit G ergibt sich $a = -24$ und somit $E: -4x_1 - 8x_2 + 12x_3 = -24$ oder ein Vielfaches davon wie z.B. $E: x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 6$

Lösung zu Abi'07 - PTV

$\vec{n_E} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ also ein Vielfachs von $\vec{n_F} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und somit sind die Ebenen parallel (oder identisch falls der Abstand gleich Null wäre).

Ebene F in Koordinatenform $F: 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 8$

und somit in der HNF $F: \dfrac{2x_1 + 2x_2 - x_3 - 8}{3} = 0$ und als Abstand für $P(1|1|0)$ ergibt sich $d = \left| \dfrac{2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 - 1 \cdot 0 - 8}{3} \right| = \dfrac{4}{3}$

Lösung zu Abi'08 - PTV

Hilfsebene H die senkrecht zu den Geraden (Richtungsvektor ist Normalenvektor der Ebene) steht und den Aufpunkt $P(2|9|4)$ von g enthält. $H: 6x_1 - 8x_2 + 2x_3 = -52$. Schnitt der Hilfsebene mit der Geraden f (*einsetzen*) ergibt $t = -\frac{1}{2}$ und den Schnittpunkt $S(-2|6|4)$ und somit ist $d = |\overrightarrow{SP}| = 5$

pirmingohn@gmail.com

Lösung zu Abi'08 - PTV2

Die gegebenen Punkte sind allesamt Spurpunkte und somit kann man die Koordinatengleichung direkt aufstellen $E: \ 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 6$ und somit ist der Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und da $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = -8 + 6 + 2 = 0$ ist $\vec{n}$ senkrecht zum Richtungsvektor von g und somit sind Ebenen E und Gerade g parallel.

Lösung zu Abi'10 - PTV

Aus 3 Punkten eine Ebene aufstellen - ein Punkt als Aufpunkt und die Verbindungsvektoren zu den anderen beiden als Spannvektoren.

$$E: \overrightarrow{OA} + s \cdot \overrightarrow{AB} + t \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad s,t \in \mathbb{R}$$

Punktprobe für den vierten Punkt D: $\begin{pmatrix} -1 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$. Aus der 3. Zeile folgt $s = \frac{1}{2}$ und aus Zeile 2 folgt somit dann $t = -1$ was in Zeile 1 eine wahre Aussage liefert - alle Punkte liegen in einer Ebene.

Lösung zu Abi'10 - PTV2

a) Abstand über HNF: $d = \left| \dfrac{3 \cdot 9 - 4 \cdot 1 + 7}{5} \right| = 6$

b) $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + 2 \cdot \overrightarrow{PS} = \begin{pmatrix} 9 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$ also $Q(-11|6|1)$

Lösung zu Abi'11 - PTV

a) $\begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ also stehen der Normalenvektor (*der Ebenen*) und der Richtungsvektor (*der Geraden*) othogonal zueinander und somit sind E und g parallel.

b) Abstand Aufpunkt P der Geraden zur Ebenen mit HNF (*mit Hilfe des Normalenvektors erstellen*) bestimmen: $d = \left| \dfrac{8 \cdot 7 + 1 \cdot 5 - 4 \cdot (-7) - 8}{9} \right| = 9$

Lösung zu Abi'12 - PTV

Umschreiben von $E: \ 4x_1 - x_2 + 2x_3 = 4$ ergibt das ein LGS mit 3 Unbekannten und 2 Gleichungen; setzt man $x_3 = t$ und löst nach den anderen Variablen auf so erhält man: $g: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 3-t \\ -2t+8 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad t \in \mathbb{R}$

Lösung zu Abi'12 - PTV2

a) es fehlt die Variable x_2 in der Koordinatenform, daher ist die Ebene parallel zur x_2-Achse

b) Hilfsgerade h senkrecht zu E mit A als Aufpunkt. $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ $t \in \mathbb{R}$ Schnitt von E und h liefert Lotfußpunkt $L(4|1|0)$ und somit:
$\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OA} + 2 \cdot \overrightarrow{AL} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ und somit $A'(7|1|-3)$.

Lösung zu Abi'13 - PTV

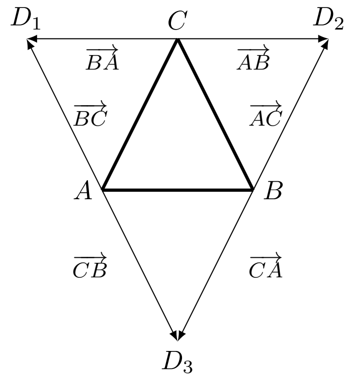
$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$ $t \in \mathbb{R}$ Für E ist somit der Richtungsvektor von g der Normalenvektor und mit C folgt $E: x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 22$
Setzt man g in E ein, so ist $t = 2$ und somit $S(3|-5|-3)$.
Damit S zwischen A und B liegen würde, müsste die x_1-Koordinate zwischen 2 und 3 liegen, dies ist jedoch nicht Fall! (*Alternativ andere Koordinate*)

Lösung zu Abi'13 - PTV2

$\vec{n_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{n_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ somit sind sie Vielfache voneinander und die Ebenen parallel.
$\vec{n_3} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ Es fehlt nur noch ein Punkt für E_3, dazu wählt man je einen aus den beiden anderen und bestimmt den Mittelpunkt dazwischen: $P_1(0|0|-1)$ und $P_2(7|7|5)$ und somit $P_3(3{,}5|3{,}5|3)$, also
$E_3: \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 3{,}5 \\ 3{,}5 \\ 3 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

Lösung zu Abi'14 - PTV

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$; $t \in \mathbb{R}$ und Hilfsebene H orthogonal zu g (Richtungsvektor ist Normalenvektor) durch C. $H: \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ und somit $H: -4x_1 + 3x_2 = 1$. g in H einsetzen ergibt $t = -1$ und somit den Lotfußpunkt $L(5|7|1)$ und den Abstand $d = |\overrightarrow{CL}| = 5$



a) Seitenlängen berechnen $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{44}$ jedoch $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{32}$ - da zwei Seiten gleich lang sind ist das Dreieck gleichschenklig

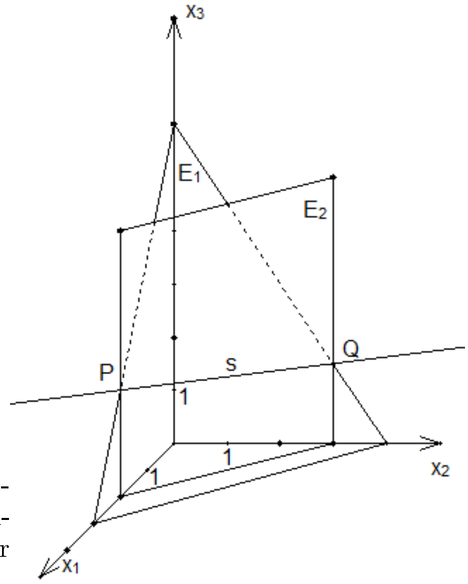
b) 3 mögliche Ergebnisse $D_1(10|2|2)$, $D_2(2|10|2)$ oder $D_3(-2|-2|6)$

3D Darstellungen

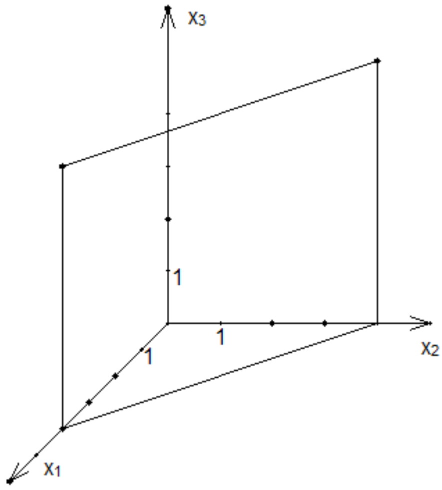
Lösung zu Abi'04 - PTZD

Spurpunkte ablesen: $S_1(5|0|0)$, $S_2(0|4|0)$ und $S_3(0|0|3)$;
Achsenabschnittsform: $E: \frac{x_1}{5} + \frac{x_2}{4} + \frac{x_3}{3} = 1$

Lösung zu Abi'06 - PTZD



Spurpunkte von E_1 ermitteln (je 2 Kooridnaten Null setzen) - E_2 hat keinen Spurpunkt auf der x_3Achse, muss daher parallel zu ihr sein. Die 2 sichtbaren Schnittpunkte liegen auf der Schnittgerade, man muss sie nur noch verbinden.

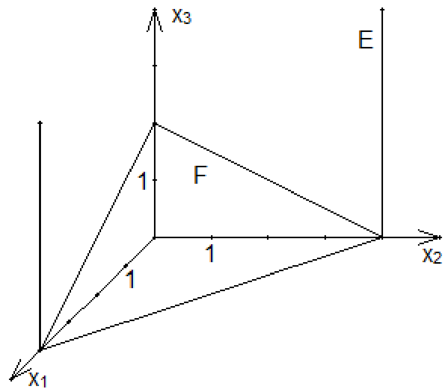


a) Spurpunkte bestimmen $S_1(4|0|0)$, $S_2(0|4|0)$- kein Spurpunkt auf der x_3-Achse d.h. die Eben ist parallel dazu.

b) g in E einsetzen $\underbrace{(1+r)}_{x_1}+\underbrace{(3-r)}_{x_2}=4$ ergibt $4=4$ was unendlich viele Lösungen hat und somit liegt die Gerade g in der Ebene$E$

c) In die Hesse'sche Normalform der Ebene $E:\ \dfrac{x_1-x_2-4}{\sqrt{2}}=0$ den Ursprung einsetzen und man es ergibt sich der Abstand zu $d=\left|\frac{0+0+4}{\sqrt{2}}\right|=\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$

Lösung zu Abi'14 - PTZD

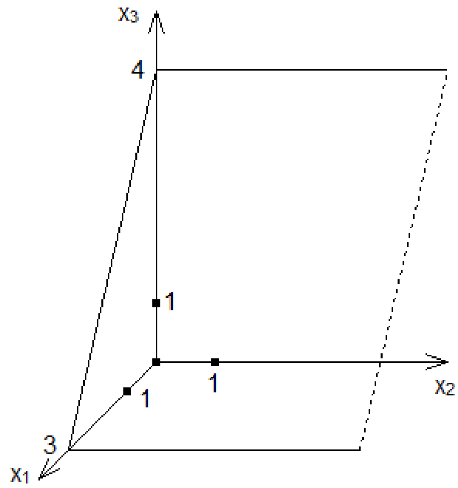


a) Spurpunkte für E: $S_1(4|0|0)$ und $S_2(0|4|0)$ jedoch keiner auf der x_3-Achse d.h. parallel dazu
Spurpunkte für F: $T_1(4|0|0)$ und $T_2(0|4|0)$ und $T_3(0|0|2)$
Die Spurpunkte S_1 und T_1 bzw. S_2 und T_2 sind identisch, also auch Schnittpunkte der Ebene und liegen somit auf der Schnittgerade. Gerade durch diese beiden Punkte: $g:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}-4\\4\\0\end{pmatrix};\quad r\in\mathbb{R}$

b) Paralle zur x_1-Achse, d.h. x_1 darf in der Koordinatenform nicht vorkommen und man kann ansätzen: $G:\ ax_2+bx_3=c$ und setzt nun die beiden identischen Punkte S_1 bzw S_2 ein und erhält die Gleichungen $4a=c$ und $2b=c$ durch gleichsetzen ist klar, dass $2a=b$ gelten muss. Wählt man nun $a=1$ so folgt $b=2$ und $c=4$ und somit $G:\ x_2+2x_3=4$. *Da man die Gleichung mit beliebigen Zahlenwerten multiplizieren darf ist die Wahl von a vollkommen beliebig!*

pirmingohn@gmail.com

Lösung zu Abi'15 - PTZD



a) Spurpunkt ermitteln - parallel zur x_2-Achse, da Schnittpunkt (Spurpunkt) mit ihr

b) Punkt auf der x_2-Achse ist $P(0|0|p)$ mit HNF ist der Abstand also $|\dfrac{3p-12}{5}| = 3$ dh. die beiden Gleichungen: $\dfrac{3p-12}{5} = 3$ und $\dfrac{3p-12}{5} = -3$ lösen und man erhält $p = 9$ und $p = -1$ und somit sind die Punkte $P_1(0|0|9)$ und $P_2(0|0|-1)$

Lösung zu Abi'04 - PTBB

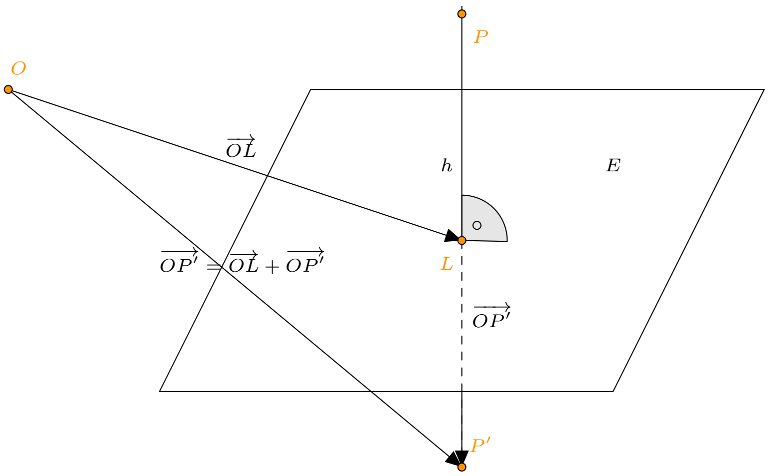
Zunächst wird die Gleichung einer Hilfsebene E aufgestellt, die orthogonal zur Geraden g ist (*der Normalenvektor von E ist der Richtungsvektor von g*) und den Punkt A enthält. Anschließend wird der Schnittpunkt S der Geraden g und der Ebene E ermittelt. S ist dann der Lotfußpunkt und der Abstand von A zum Lotfußpunkt R entspricht dem Abstand der Geraden zum Punkt A. Der Abstand von S zu A beträgt $d = |\overrightarrow{SA}|$.

Lösung zu Abi'05 - PTBB

a) Hilfsgerade h, die senkrecht zur Ebene steht und durch den Punkt P verläuft (d.h. der Richtungsvektor von g entspricht dem Normalenvektor von E)

b) Berechnung des Schnittpunktes von der Hilfsgerade h mit der Ebene E. Hiermit erhält man den Lotfußpunkt L.

c) $\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OL} + \overrightarrow{PL}$. Es gilt ja $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP'}$ Die Koordinaten des Vektors $\overrightarrow{OP}$ entsprechen den Punktkoordinaten des Punktes P'.



pirmingohn@gmail.com

Lösung zu Abi'06 - PTBB

Der Vektor $\overrightarrow{AB}$ steht senkrecht auf E, er ist also ein Normalenvektor von E. Der Mittelpunkt M_{AB} zwischen A und B liegt zusätzlich in E. Man kann die Gleichung also in der Normalenform angeben:

$$E:\ (\vec{x}-\vec{m})\cdot\overrightarrow{AB}=0$$

Lösung zu Abi'07 - PTBB

a) Hilfsgerade h durch S und orthogonal (*Normalenvektor von E als Richtungsvektor von h*) zu E aufstellen

b) Schnittpunkt M der von h und E ist der Grundkreismittelpunkt

c) $r=|\overrightarrow{MP}|$ entspricht dem Grundkreisradius

Lösung zu Abi'08 - PTBB

- sind $\vec{n_1}$ und $\vec{n_2}$ Vielfache voneinander und die Ebenen sind parallel - liegt P_1 zusätzlich in E_2, so sind die ebenen identisch
- $\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}=0$ so sind die Ebenen orthogonal und schneiden sich in einer Geraden
- in allen anderen Fällen schneiden sich die Ebene in einer Gerade, jedoch nicht orthogonal

Lösung zu Abi'09 - PTBB

a) Hilfseben H orthogonal zu g (Richtungsvektor wird Normalenvektor) die A enthält.

b) Lotfußpunkt L als Schnittpunkt von H und g bestimmen

c) $\overrightarrow{OA'}=\overrightarrow{OA}+2\cdot\overrightarrow{AL}$ - Koordinaten von $\overrightarrow{OA'}$ entsprechen denen des Punktes A'

Lösung zu Abi'10 - PTBB

a) Punkt P auf g wählen, jedoch nicht S

b) P an E spiegeln
  - Hilfsgerade h orthogonal zu E durch P
  - Schnittpunkt Q von F mit h bestimmen
  - $\overrightarrow{OP'}=\overrightarrow{OP}+2\cdot\overrightarrow{PQ}$ ergibt die Koordinaten von P'

c) $g':\ \vec{x}=\overrightarrow{OS}+t\cdot\overrightarrow{SP'};\quad t\in(R)$ mit S und P' aufstellen

Lösung zu Abi'11 - PTBB

a) Hilfsebene H orthogonal zu g und durch A

b) Schnittpunkt S von H und g ist der gesuchte Punkt

Lösung zu Abi'12 - PTBB

Sei die Ebene gegebene durch: $E:\ (\vec{x}-\vec{p})\vec{n}=0$ und die Gerade durch $g:\ \vec{x}=\vec{p}+r\cdot\vec{u};\quad r\in\mathbb{R}$.

a) Ortsvektor der neuen Geraden h kann der von g sein

b) der neue Richtungsvektor $\vec{v}=\vec{u}\times\vec{n}=0$

c) $h:\ \vec{x}=\vec{p}+t\cdot\vec{v};\quad t\in\mathbb{R}$

Lösung zu Abi'14 - PTBB

a) Hilfsgerade g orthogonal zu E und durch M (Mittelpunkt)

b) Schnittpunkt S von E mit g bestimmen

c) $r=|\overrightarrow{MS}|$ ist der Kugelradius