Lösung zu Abi'04 - WT - Vektoren 1.1

a) Ebenengleichung **PQS** $E_1:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}+r_1\cdot\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}+s_1\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$; $r_1,s_1\in\mathbb{R}$ Normalenvektor von E_1: $\vec{n_1}=\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\0\\-2\end{pmatrix}$ „gekürzt“ $\vec{n_1}=\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$

Ebenengleichung **OPS** $E_2:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}+r_2\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}+r_2\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$; $r_2,s_2\in\mathbb{R}$ Normalenvektor von E_2: $\vec{n_2}=\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-4\\2\end{pmatrix}$ „gekürzt“ $\vec{n_2}=\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}$

Winkelweite zw. Ebenen $\cos(\alpha)=\dfrac{\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}}{|\vec{n_1}||\vec{n_2}|}=\dfrac{1}{5}$ und somit $\alpha=78{,}5°$, es wird jedoch der stumpfe Winkel gesucht, also $\beta=180°-\alpha=101{,}5°$

b) PQS ist gleichschenklig; $M_{PQ}(2|1|0)$ und der Flächeninhalt des Dreiecks PQS ist: $A_{PQS}=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{PQ}||\overrightarrow{M_{PQ}S}|=\sqrt{5}$

Koordinaten der Punkte: $A(2|\frac{1}{2}|0)$, $B(2|\frac{3}{2}|0)$, $C(\frac{3}{2}|\frac{5}{4}|1)$ und $D(\frac{3}{2}|\frac{3}{4}|1)$. Die Höhe des Trapezs ist Hälfte der Strecke von M_{PQ} nach S also $h_T=\frac{1}{2}|\overrightarrow{M_{PQ}S}|=\frac{\sqrt{5}}{2}$

$$A_T=\frac{|\overrightarrow{CD}|+|\overrightarrow{AB}|}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}}{2}=0{,}375\sqrt{5}$$

Anteil: $\dfrac{A_T}{A_{PQS}}=\dfrac{0{,}375\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=0{,}375=37{,}5\ \%$

c) Lampe: $L(1|1|\frac{7}{4})$ - Gerade g_1 durch L und C mit mit x_1x_2-Ebene (Boden $x_3=0$) schneiden:

$g_2:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}1\\1\\\frac{7}{4}\end{pmatrix}+t_1\cdot\begin{pmatrix}0{,}5\\0{,}25\\-0{,}75\end{pmatrix}$; $t_1\in\mathbb{R}$ mit $x_3=0$ folgt $t_1=\frac{7}{3}$ und somit $C'(\frac{13}{6}|\frac{19}{12}|0)$

Gerade g_2 durch L und D analog $g_2:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}1\\1\\\frac{7}{4}\end{pmatrix}+t_2\cdot\begin{pmatrix}0{,}5\\-0{,}25\\-0{,}75\end{pmatrix}$; $t\in\mathbb{R}$ mit $x_3=0$ folgt $t_2=\frac{7}{3}$ und somit $D'(\frac{13}{6}|\frac{5}{12}|0)$ und die gesuchte Strecke ist $|\overrightarrow{C'D'}|=\dfrac{7}{6}$

Lösung zu Abi'04 - WT - Vektoren 2.1

a) $E_3: x_1-x_3=0$ also parallel zur x_2-Achse, da $(0|0|0)$ in E liegt, liegt auch die x_2-Achse in E

$g_a:\vec{x}=\begin{pmatrix}10\\0\\0\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}a\\0\\-1\end{pmatrix}$ mit $t\in\mathbb{R}$, dabei ist der NV von E_a der RV von g_a

g_a in E_a einsetzen ergibt den genannten Schnittpunkt

b) Dreiecksseiten als Vektoren darstellen und $\overrightarrow{BD_a}\overrightarrow{AD_a}=0$ zeigen

Lösung zu Abi'05 - WT - Vektoren 1.1

a) Skizze obliegt dem geneigte Leser selbst ;)

$$g_{DS}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} \qquad g_{AS}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}; \quad t_1, t_2 \in \mathbb{R}$$

Durch einsetzen mit E_2 schneiden ergibt $t_1 = t_2 = \frac{1}{2}$ und somit $F(2|6|4)$ und $G(2|2|4)$.

$\overrightarrow{BC}$ ist ein Vielfaches von $\overrightarrow{GF}$ also sind die zugehörigen Seiten parallel; $|\overrightarrow{BG}| = |\overrightarrow{CF}| = \sqrt{56}$ und somit ist das Trapez auch gleichschenklig.

Winkel bei B: $\cos(\beta) = \dfrac{\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BG}}{|\overrightarrow{BC}||\overrightarrow{BG}|} = \dfrac{16}{\sqrt{8 \cdot \sqrt{56}}} \Rightarrow \beta = 74{,}5°$ Da das Trapez gleichschenklig ist, ist der $\gamma = \beta$ (Winkel bei C) und die anderen beiden Winkel jeweils 105,5° (Innenwinkelsumme 360°)

b) HNF aufstellen und auflösen nach r^* - Achtung zwei Fälle wegen Betrag; Probe nicht vergessen - es gilt $r^* = \frac{9}{4}$ und somit $E_*: \frac{9}{4}x_1 + 3x_3 = 18$

Gesuchter Punkt ist Lotfußpunkt der Hilfsgeraden h durch S orthogonal zur Ebenen $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \frac{9}{4} \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$; $t \in \mathbb{R}$ - h in E_* liefert $t = -\frac{16}{15}$ und somit $P\left(\frac{8}{5}|4|\frac{24}{5}\right)$

c) $g_{BC}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$ $t \in \mathbb{R}$ - g_{BC} in E_r ergibt $8r + 0 = 8r$, was für jedes $r \in \mathbb{R}$ stimmt, also liegt die Gerade in allen Ebenen der Schar.

Da B und C in jeder Ebene liegen, dreht sich die Schar um g_{BC} für $r = 0$ ist der Schnitt genau die Bodenplatte der Pyramide (Quadrat). Liegt die Spitze S in der Ebene($r = 6$), so ist der Schnitt genau die Außenfläche (Dreieck). Für $0 < r < 6$ liegt schneidet die Ebene die Pyramide und erzeugt ein Trapez. Ansonsten haben Pyramide und Ebene nur die Kante BC gemeinsam.

Lösung zu Abi'05 - WT - Vektoren 2.1

a) Richtungsvektor von g und $\overrightarrow{AB}$ als Spannvektoren; Kreuzprodukt zur Koordinatenform $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$; $r, s \in \mathbb{R}$ also $E: x_3 = 3$ sie ist somit parallel zur x_1x_2-Ebene mit dem Abstand 3.

Da g parallel zu E und somit zur x_1x_2-Ebene ist, muss man für den Abstand nur die x_3-Koordinaten vergleichen - Abstand: 2

b) allgemein $T(5 + r|3|5)$ (so liegt T immer auf g). Es muss gelten $\overrightarrow{AT}\overrightarrow{BT} = (3 + r)^2 - 4 + 4 = 0$ also $r = -3$ und somit $T(2|3|5)$ und der Flächeninhalt ist $A = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AT}||\overrightarrow{BT}| = 4$

Mittelpunkt der drei Punkte bestimmen: $M(\dfrac{2+2+2}{3}|\dfrac{1+5+3}{3}|\dfrac{3+3+5}{3})$ also $M(2|3|\frac{11}{3})$ (gibt jedoch unendlich viele Lösungen - 3. Koordinate ist in diesem Fall eigentlich beliebig)

c) Der Radius des Doppelkegels entspricht dem Abstand des Punktes C von der Geraden g_{AB}. Diesen Abstand bestimmt man mit der Hilfsebene H die senkrecht zu g_{AB} ist und C enthält. Der Schnittpunkt von g_{AB} und H ist $S(2|3|3)$. Radius der Kegel: $|\overrightarrow{CS}| = 2$; Höhe des ersten Kegel $\overrightarrow{AS} = 2|$ und Höhe des zweiten Kegels $|\overrightarrow{BS}| = 2$ somit: $V_1 = V_2 = \frac{1}{3}\pi 2^3 = \frac{8}{3}\pi$ und $V_{Doppelkegel} = \frac{16}{3}$

Lösung zu Abi'06 - WT - Vektoren 1.1

a) $E: 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 29$ (oder Vielfache davon)
Gleichschenklig, da $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AD}| = 9\,\text{LE}$ jedoch $|\overrightarrow{BD}| = 12\,\text{LE}$
$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AD}$ also $C(-3|5|8)$und $M(0|5|2)$

b) $V = \frac{1}{3}Gh$; $G = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = 6 \cdot \sqrt{180}\,\text{FE}$ und $h = \left|\dfrac{4 \cdot 8 + 5 \cdot 15 + 2 \cdot 6 - 29}{\sqrt{4^2 + 5^2 + 2^2}}\right|\,\text{LE} = \dfrac{90}{\sqrt{45}}\,\text{LE}$
ist der Abstand von S zu E und somit $V = 360\,\text{VE}$
Die Höhe ist identisch, der Radius des Kreises entspricht dem Abstand M zur Gerade durch A und B. (Achtung die Grundfäche war kein Quadrat, daher ist es nicht die Mitte zwischen A und B! Der Lotfußpunkt wäre $L(\frac{32}{9}|\frac{25}{9}|\frac{4}{9})$ und somit $r = |\overrightarrow{MF}| = \sqrt{20}$ und $V = \frac{1}{3}\pi 20 \frac{90}{\sqrt{45}}\,\text{VE} \approx 281\,\text{VE}$

Lösung zu Abi'06 - WT - Vektoren 2.1

a) Die Spitze S der Pyramide ergibt sich als Schnittpunkt zweier (verlängerter) Seitenkanten des Pyramidenstumpfes (Geradenschnittpunkt)

Die Koordinaten von D' erhält man als Schnittpunkt der Geraden durch D und S mit der Ebene (Deckfläche) durch $A'B'C'$ - $D(0|3|20)$. Die Zeichnung wird dem geneigten Leser selbst überlassen.

b) Das Viereck $ABB'A'$ stellt ein Trapez dar, da die Kanten AB und $A'B'$ zueinander parallel (Vektoren sind Vielfache voneinander) sind. Höhe des Trapez durch Abstand Punkt A' von Gerade durch A und B bestimmen (Hilfsebene senkrecht zur Gerade und durch A) $h \approx 20{,}1$ und somit $A_{Trapez} = \dfrac{|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{A'B'}|}{2} \cdot h \approx 128$.

Für den Überhang betrachtet man nur die Projektion auf die x_1x_2-Ebene (x_3-Koordinate einfach weg lassen), mit einer kleinen Skizze erkennt man, dass die Punkte A' und B' außerhalb der Grundfläche $ABCD$ liegen und somit hängt die Wand nach außen über.

Lösung zu Abi'06 - WT - Vektoren 2.2

a) $\vec{v}$ so wählen, dass S auf h liegt - am besten $t = 1$ wählen so ist $\vec{v} = \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

b) $\vec{v}$ darf kein Vielfaches des Richtungsvektors von g sein und die Geraden dürfen keinen Schnittpunkt haben - da man fast immer windschiefe Geraden durch Zufall erstellt einen Vektor wählen $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und überprüfen ob es eine Schnittpunkt gibt

c) Ansatz: $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ - 2 Bedingungen - Richtungsvektoren orthogonal - führt zu $v_1 = -v_3$ und
Schnittpunkt: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$
Addition der ersten und dritten Zeile führt zu $s = -\frac{1}{2}$ und $F(-\frac{1}{2}|0|\frac{5}{2})$ mit der Festlegung $t = 1$ folgt nun $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2{,}5 \\ -2 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}$

pirmingohn@gmail.com

Lösung zu Abi'07 - WT - Vektoren 1.1

a) Spurpunkt $S_1(8|0|0)$. $S_2(0|8|0)$ und $S_3(0|0|4)$ ermitteln und zeichnen.

Der Normalenvektor der x_1x_2-Ebene lautet $\vec{n_{12}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und somit gilt für den Schnittwinkel der Ebenen $\cos(\alpha) = \dfrac{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{6} \cdot 1} = \dfrac{2}{\sqrt{6}}$ also $\alpha \approx 35{,}3°$

Halbe Höhe des Mastes liegt bei $L(6|4|4)$. Die Länge des Stahlseils entspricht dem kürzesten Weg vom Punkt L zum Hang also dem Abstand von L zu E (Hilfsgerade h orthogonal zu E mit Aufpunkt L, der Schnittpunkt von E und h entspricht dem Verankerungspunkt $V\left(\frac{13}{3}\middle|\frac{7}{3}\middle|\frac{2}{3}\right)$ - die Länge der Verbindungsvektors ist etwa 4,1

b) Der Schatten beginnt im Punkt H und endet im Punkt T. Zunächst muss die Gleichung der Geraden g aufgestellt werden (Gerade enthält die Punkte S_1 und S_2). Anschließend stellt man die Gerade h auf, die S enthält und den Richtungsvektor der Sonnenstrahlen besitzt. Der Schnittpunkt von h und E ergibt T. Zur Berechnung des Punktes U wird eine Hilfsebene L aufgestellt. Diese Hilfsebene enthält die Punkte H, S und T. Diese Hilfsebene wird mit der Gerade g geschnitten. Der Schnittpunkt ergibt U. Die Länge des Schattens wird berechnet durch $|\overrightarrow{TU}| + |\overrightarrow{UH}|$ (Skizze!)

c) Der Punkt $K(6|4|k)$ hat die Eigenschaft, dass die Spitze des Mastes $S(6|4|8)$ die gleiche Entfernung hat wie der Punkt $R(4|0|2)$. $|\overrightarrow{SK}| = |\overrightarrow{RK}|$ also $8 - k = \sqrt{2^2 + 4^2 + (k-2)^2}$ nach $k = \frac{10}{3}$ auflösen. Der Mast knickt also in etwa $33{,}3\,m$ ab.

Lösung zu Abi'07 - WT - Vektoren 2.1

a) $C(3|5|0)$, $E(0|0|4)$, $G(3|5|4)$ und $H(0|5|4)$ - Abstand ist $|\overrightarrow{AH}| = \sqrt{41}$ - Punktprobe für E und H, beide liegen in jeder E_t, also auch die Gerade die beide verbindet. Deckenebene: $E_? :\ x_3 = 4$, dies entspricht der Ebene E_0 der Schar. Bei geöffnetem Deckel (90°) steht der Deckel in der x_2x_3-Ebene also $E_? : x_1 = 0$, dies entspricht keiner Ebene der Schar, da x_3 immer enthalten sein muss.

b) $M(1{,}5|0|4)$ - Hilfsgerade h mit Aufpunkt M orthogonal zu E_2 - h in E_2 einsetzen ergibt $P(0{,}3|0|4{,}6)$

a) Winkel zwischen E_2 und der Ebene $x_3 = 4$

also $\cos(\alpha) = \dfrac{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{1}\sqrt{5}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ also $\alpha \approx 63{,}4°$

$\cos(60°) = 0{,}5$ also $\dfrac{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{1}\sqrt{t^2+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{t^2+1}} = 0{,}5$

also $t = \pm\sqrt{3}$ (mit Einschränkungen aus der Aufgabe: $t = \sqrt{3}$)

Allgemein: $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{t^2+1}}$ also $t = \sqrt{\dfrac{1}{\cos^2(\alpha)} - 1}$

b) Die Lichtquelle L liegt genau oberhalb des Mittelpunktes der Kante AD. Skizze nicht Maßstabsgetreu! - gesucht Q! Die Kiste ist 4 hoch, die Lampe somit 16 über M_{EH}. Der Deckel und die Kiste sind 3 breit (Radius des Kreises).

$\cos(\alpha) = \dfrac{13}{3}$ und somit $\alpha \approx 79{,}4°$

also $\beta = 21{,}2°$ ($M_{FG}M_{EH}Q$ ist gleichschenklig!) der Öffnungswinkel