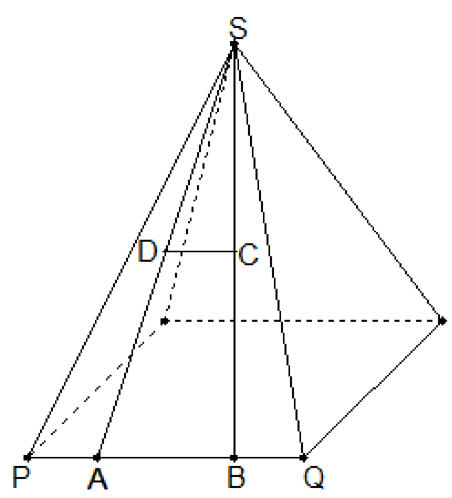
A 1 Abi'04 - WT - Vektoren 1.1

Ein Zelt hat die Form einer senkrechten quadratischen Pyramide. Die Längen der Quadratseiten und die Pyramidenhöhe betragen jeweils 2,0 m.



a) (6) Benachbarte Seitenflächen bilden einen stumpfen Winkel. Wie groß ist dieser?

b) (5) In der Vorderfläche PQS befindet sich eine Einstiegsöffnung $ABCD$ in der Form eines symmetrischen Trapezes. C und D sind die Mitten der Strecke BS bzw. der Strecke AS. Die Strecke AB hat die Länge 1,0 m. Wie viel Prozent der Vorderfläche beansprucht die Einstiegsöffnung?

c) (5) Zur Beleuchtung wird im Zelt eine Lampe aufgehängt, die im Folgenden als punktförmige Lichtquelle betrachtet werden soll. Ihr Licht dringt durch die Einstiegsöffnung nach außen und erzeugt auf dem Boden vor dem Zelt das Bild $ABC'D'$ der Einstiegsöffnung als „Lichtteppich". Berechne die Länge der Strecke $C'D'$, wenn sich die Lampe 25 cm unter der Zeltspitze befindet.

A 2 Abi'04 - WT - Vektoren 2.1

Gegeben sind die Punkte $A(10|0|0)$ und $B(0|10|0)$ sowie für jedes $a > 0$ eine Ebene $E_a : a \cdot x_1 - x_3 = 0$

a) Beschreibe die Lage der Ebene E_3
Die zu E_a senkrechte Gerade durch A schneidet E_a im Punkt D_a. Bestimme seine Koordinaten.

Teilergebnis: $D_a = \left(\frac{10}{1+a^2} \middle| 0 \middle| \frac{10a}{1+a^2} \right)$

b) Zeige, dass das Dreieck ABD_a für jedes $a > 0$ rechtwinklig ist

A 3 Abi'05 - WT - Vektoren 1.1

Gegeben sind eine Pyramide $ABCDS$ mit den Punkten $A(0|0|0)$, $B(8|0|0)$, $C(8|8|0)$, $D(0|8|0)$, $S(4|4|8)$ sowie für jedes $r \in \mathbb{R}$ eine Ebene $R_r : \ rx_1 + 3x_3 = 8 \cdot r$

a) (7) Stelle die Pyramide in einem Koordinatensystem dar. Die Ebene E_2 enthält die Pyramidenkante $\overline{BC}$ und schneidet die Kante $\overline{DS}$ in F und die Kante $\overline{AS}$ in G. Gib die Koordinaten der Punkte F und G an. Zeichne das Viereck $BCFG$ ein. Zeige, dass das Viereck ein gleichschenkliges Trapez ist. Wie groß sind die Innenwinkel dieses Trapezes?

b) (4) Bestimme r^* so, dass die Pyramidenspitze S von der Ebene E_{r^*} den Abstand 4 hat. Gib die Koordinaten desjenigen Punktes in dieser Ebene an, der von S den Abstand 4 hat.

c) (5) Weise nach, dass die Gerade durch B und C in jeder Ebene E_r liegt. Beim Schnitt der Ebene E_r mit der Pyramide entsteht eine Schnittfigur. Welche Schnittfiguren sind möglich? Gib die jeweiligen Werte von r an.

A 4 Abi'05 - WT - Vektoren 2.1

Gegeben sind die Punkte $A(2|1|3)$ und $B(2|5|3)$ sowie $g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $r \in \mathbb{R}$

a) (4) Die Ebene E enthält die Punkte A und B und verläuft parallel zu g. Bestimme eine Gleichung von E. Beschreibe die Lage von E. Welchen Abstand hat g von E?

b) (5) Der Punkt T liegt auf der Geraden g und bildet zusammen mit den Punkten A und B ein bei T rechtwinkliges Dreieck. Bestimme die Koordinaten von T. Welchen Flächeninhalt hat das Dreieck ABT? Bestimme einen Punkt, der von A, B und T den gleichen Abstand hat.

c) (3) Das Dreieck ABC mit $C(2|3|5)$ rotiert um die Seite AB. Dabei entsteht ein Doppelkegel. Bestimme dessen Volumen.

A 5 Abi'06 - WT - Vektoren 1.1

Die Punkte $A(3|5|-4)$, $B(4|1|4)$ und $D(-4|9|0)$ legen eine Ebene E fest.

a) (5) Bestimme eine Koordinatengleichung der Ebene E. Zeige, dass das Dreieck ABD gleichschenklig, aber nicht gleichseitig ist. Bestimme die Koordinaten des Punktes C so, dass das Viereck $ABCD$ eine Raute ist. Berechne die Koordinaten des Diagonalenschnittpunktes M dieser Raute.
Teilergebnisse: $E:\ 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 29;\ M(0|5|2)$

b) (7) Gegeben ist ein weiterer Punkt $S(8|15|6)$. Die Raute $ABCD$ bildet zusammen mit dem Punkt S eine Pyramide. Bestimme das Volumen dieser Pyramide. Der Pyramide wird ein Kreiskegel mit Spitze S einbeschrieben, dessen Grundfläche in der Ebene E liegt. Berechne das Volumen des Kreiskegels.

A 6 Abi'06 - WT - Vektoren 2.1

In einem Freizeitpark steht eine Kletteranlage in Form eines Pyramidenstumpfes mit vier unterschiedlichen Kletterwänden. Der Pyramidenstumpf entsteht aus einer Pyramide, indem diese parallel zur Grundfläche durchgeschnitten und der obere Teil weggelassen wird. Der Pyramidenstumpf hat als Grundfläche das Viereck $ABCD$ mit $A(0|0|0)$, $B(6|6|0)$, $C(0|18|0)$ und $D(-8|4|0)$ und als Deckfläche das Viereck $A'B'C'D'$ mit $A'(4|1|20)$, $B'(7|4|20)$ und $C'(4|10|20)$ (Koordinatenangaben in Meter)

a) (5) Zeige, dass $S(8|2|40)$ die Spitze der ursprünglichen Pyramide ist. Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes D'. Zeichne den Pyramidenstumpf in ein Koordinatensystem ein.

b) (6) Berechne den Flächeninhalt der Wand $ABB'A'$. Untersuche, ob die Wand $ABB'A'$ nach außen überhängt.

A 7 Abi'06 - WT - Vektoren 2.2

Gegeben sind die Geraden $g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $h:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \vec{v}$ mit $s,t \in \mathbb{R}$
Gib zu jeder der folgenden Lagebeziehungen von g und h jeweils einen möglichen Vektor $\vec{v}$ an und begründe deine Antworten:

a) g und h schneiden sich im Punkt S(-4/0/-1)

b) g und h sind windschief

c) g und h schneiden sich orthogonal

A 8 Abi'07 - WT - Vektoren 1.1

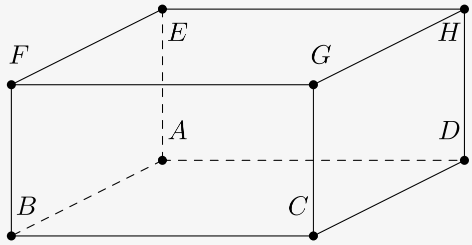
Die Ebene $E: \ x_1 + x_2 + 2x_3 = 8$ stellt für $x_3 \geq 3$ einen Hang dar, der aus der x_1x_2-Ebene aufsteigt. Im Punkt $H(6|4|0)$ steht ein $80\,m$ hoher Sendemast senkrecht zur x_1x_2-Ebene. (1 LE entspricht 10m).

a) (6) Stelle den Hang und den Sendemast in einem Koordinatensystem dar. Bestimme den Neigungswinkel des Hangs. Der Sendemast wird auf halber Höhe mit einem möglichst kurzen Stahlseil am Hang verankert. Berechne die Koordinaten des Verankerungspunktes am Hang. Bestimme die Länge des Stahlseils.

b) (3) Der Sendemast wird von der Sonne beschienen und wirft einen Schatten auf die x_1x_2-Ebene und den Hang. Der Schatten des Sendemastes endet in einem Punkt T des Hangs. Beschreibe einen Weg, wie man die Gesamtlänge des Schattens bestimmen kann.

c) (3) Bei einem Sturm knickt der Sendemast im Punkt $K(6|4|k)$ um. Die Spitze des Sendemastes trifft dabei den Hang im Punkt $R(4|0|2)$. Bestimme die Höhe, in welcher der Sendemast abgeknickt ist.

A 9 Abi'07 - WT - Vektoren 2.1



Eine quaderförmige Kiste ist in einem Koordinatensystem durch die Eckpunkte $A(0|0|0)$, $B(3|0|0)$, $D(0|5|0)$ und $F(3|0|4)$ festgelegt. Die Fläche $EFGH$ stellt den Deckel der geschlossenen Kiste dar. Dieser ist drehbar um die Kante EH. Weiterhin ist für jedes $t \geq 0$ eine Ebene E_t gegeben durch $E_t: \ t \cdot x_1 - x_3 = -4$.

a) (5) Berechne den Abstand zwischen den Kanten AB und GH. Zeige, dass die Gerade durch E und H in jeder Ebene E_t liegt. In welcher Ebene E_t liegt der Deckel bei geschlossener Kiste? Liegt der Deckel in einer Ebene E_t, wenn er um 90° geöffnet ist?

b) (3) Wenn der Deckel der geöffneten Kiste in E_2 liegt, wird er durch einen Stab orthogonal zum Deckel abgestützt. Dieser Stab ist in Mitte der Kante EF befestigt und trifft im Punkt P auf den Deckel. Berechne die Koordinaten von P.

c) (4) Wie groß ist der Öffnungswinkel, wenn der Deckel in E_2 liegt? In welcher Ebene E_t liegt der Deckel, wenn der Öffnungswinkel 90° beträgt? Bestimme den Parameter t in Abhängigkeit vom Öffnungswinkel α für $0° \leq \alpha < 90°$

d) (4) Eine punktförmige Lichtquelle in $L(0|2{,}5|20)$ beleuchtet die Kiste. Wie weit kann man die Kiste höchstens öffnen, ohne das Licht von L in die Kiste fällt?