Def. 1

Unter einer gebrochen rationalen Funktion versteht man den Quotienten zweier ganzrationaler Funktionen (Polynome). Dabei setzt sich der Funktionsterm aus dem Zählerpolynom vom Grad z und dem Nennerpolynom vom Grad n zusammen.

$$f(x) = \frac{Z(x)}{N(x)}$$

Ist x_N eine Nullstelle des Zählerpolynoms, so heißt sie Nullstelle der Funktion, falls sie zum Definitionsbereich gehört.
Gilt $Z(x_N) \neq 0$ und $N(x_N) = 0$, so ist x_N eine Definitionslücke und darf in der Definitionsmenge nicht enthalten sein. x_N ist eine sogenannte Polstelle von f und die Gerade mit $x = x_N$ ist eine senkrechte Asymptote[a].

[a] Nähert sich ein Graph einer Geraden an, ohne dass sich beide je im Verlauf berühren, so ist die Gerade eine Asymptote des Graphen. Eine Asymptote einer solchen Kurve ist eine Gerade, der sich die Kurve „im Unendlichen beliebig annähert“

Bsp. 1

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^3 + 2x^2 - 5x - 6}{x^5 - 6x^3 + 2x^2 + 9x - 6} \\ &= \frac{(x+1)(x-2)(x+3)}{(x-1)^2(x+2)(x^2+3)} \end{aligned}$$

Dabei ist $z = 3$ und $n = 5$. $x_1 = -1$, $x_2 = 2$ und $x_3 = -3$ sind Nullstellen der Funktion f und der Definitionsbereich wäre $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}\backslash\{-2; 1\}$ („$\mathbb{R}$ ohne -2 und 1“), die Funktion hat also an den Stellen $x = -2$ und $x = 1$ Definitionslücken. Insbesondere nennt man 1 eine doppelte Nullstelle des Nennerpolynom, da sie in der Zerlegung doppelt vorkommt.

Satz 1

Sei x_N eine Nullstelle des Nennerpolynoms einer gebrochen rationalen Funktion und $n_0 \geq 1$ bzw. $z_0 \geq 0$ die zugehörige Vielfachheiten im Nenner- bzw. Zählerpolynom so gilt, falls die $n_0 - z_0$

gerade ist, dass eine Polstelle ohne Vorzeichenwechsel vorliegt

ungerade ist, dass eine Polstelle mit Vorzeichenwechsel vorliegt

≤0 ist, dass die Definitionslücke „hebbar“ ist und es keine Polstelle vorliegt, insbesondere gibt es keine senkrechte Asymptote an dieser Stelle x_N

Satz 2

Sei $f(x)$ eine gebrochen rationale Funktion wie in der Definition, so ist das Verhalten für $x \to \pm\infty$ gegeben durch

z<n $f(x) \to 0$; x-Achse ist waagerechte Asymptote

z=n $f(x) \to c$; die Gerade mit $y = c$ ist waagerechte Asymptote und c der Quotient der Koeffizienten der jeweils höchsten Potenz von x im Zähler und Nenner

z>n keine waagerechte Asymptote, ist $z - n = 1$ so kann mit Hilfe der Polynomdivision eine schiefe Asymptote bestimmt werden

pirmingohn@gmail.com