Lösung zu Abi'04 - WTA 1.1

a) Graph siehe GTR - Wertetabelle nutzen;

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2\left(1-\frac{36}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{16}{x^2}\right)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1-\frac{36}{x^2}}{1+\frac{16}{x^2}} = \frac{1-0}{1+0} = 1$$

$$f'(x) = \frac{104x}{(x^2+16)^2} \qquad f''(x) = \frac{-312x^2+1664}{(x^2+16)^3}$$

Wendepunktbedingung: $f''(x) = 0 \;\Rightarrow\; x_{1;2} = \pm\sqrt{\frac{16}{3}}$. Da $f''(x)$ an diesen Stellen jeweils das Vorzeichen wechselt liegt jeweils eine Wendepunkt vor (Alternative $f'''(x) \neq 0$ an diesen Stellen nachweisen).

c) Die Sichtlinie der Person ergibt sich aus der Tangente, die vom Punkt$P(0|-2,25)$ aus an die Kurve K angelegt wird. Der unbekannte Berührpunkt hat die Koordinaten $Q(u/f(u))$. Allgemeine Tangentengleichung in Q: $t:\; y = f'(u)(x-u)+f(u)$. Nun setzt man die Ableitung aus Teil a.) und den Punkt Q ein: $-2,25 = \frac{104u}{(u^2+16)^2}(0-u) + \frac{u^2-36}{u^2+16}$ und löst mit dem GTR: $u = \pm 4$. Aus Symmetriegründen reicht es $u = 4$ ein zu setzen und man bekommt: $t:\;\; y = 0,40625x - 2,25$ als Tangentengleichung und schneidet diese mit $y = 1,5$ (Augenhöhe) was zur Lösung $9,23\,m$ führt, da das Kanalufer $6\,m$ vom Mittelpunkt enfernt ist beläuft sich der Abstand auf $3,23\,m$

Lösung zu Abi'06 - WTA 3.1

a) Skizze siehe GTR. Hochpunkt $HP(2|14,7)$. Schnittstellen mit $y = 4$ sind $t_1 \approx 0,22$ und $t_2 \approx 7,15$, die Zeitspanne beträgt daher etwa $7,15 - 0,22 = 6,93$ (Stunden). Die mittlere Konzentration beträgt $\frac{1}{12}\int\limits_0^{12} f(t)\,dt \approx 6,55$ $(\frac{mg}{l})$.

b) Abbau maximal bei Tiefpunkt der Ableitungsfunktion - $f'(t) = e^{-0,5t}(20-10t)$ - Tiefpunkt bei $TP(4|-2,71)$
Tangentengleichung: $m_T = f'(4) \approx -2,71$ und $P(4|10,8)$ ergibt die Gleichung$t:\; y = -2,71x + 21,7$ welche für $t \approx 8$ die t-Achse schneidet. Das Medikament wäre also nach etwa 8 Stunden abgebaut.

c) Für den Bereich $0 \le t \le 4$ wird $f(t)$ skizziert, danach
$g(t) = f(t) + f(t-4) = 20te^{-0,5t} + 20(t-4)e^{-0,5(t-4)}$ (der zweite Term beschreibt einen um 4 Einheiten nach rechts verschobenen Graphen)
Schnittpunkt von $y = 20$ und $g(t)$ ermitteln - für $4,91 \le t \le 6,29$ ist die Konzentration zu hoch

d) größer Wert entspricht einem Hochpunkt man benötigt daher auch noch die Ableitung $g'(t) = ae^{-bt}(1-bt)$ und es müssen die Bedingungen $g(4) = 10$ und $g'(4) = 0$ gelten. Aus der Ableitung folgt $b = 0,25$ (SdNp) was man in die erste Gleichung einsetzt und so $a = \frac{5}{2}e \approx 6,8$ ergibt.

pirmingohn@gmail.com