A 1

Für jedes $t > 0$ ist eine Funktion gegeben durch

$$f_t(x) = e^{tx}(x-1)^2$$

a) zeige, dass alle Funktionen f_t zwei gemeinsame Punkte haben

b) bestimme die erste Ableitung

c) zeige, dass ein Minimum und ein Maximum existieren

d) zeige, dass die Ortskurve der Maxima $g(x) = e^{\frac{2x}{1-x}}(x-1)^2$ lautet

A 2

Für $t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ ist eine Funktion gegeben durch

$$f_t(x) = -\frac{2x}{t}e^{tx}$$

a) Bestimme die allgemeinen Koordinaten der Wendepunkte

b) Bestimme die Ortskurve der Wendepunkte

A 3

Ein Unternehmen stell ein Produkt her, die Kosten bei x Produkten belaufen sich dabei auf $K(x) = 500 + 7x + 0,01x^2$ (in GE). Der Verkaufspreis beträgt 13 GE je Produkt. Maximal können 600 Produkte hergestellt werden.

a) Gib die Gewinnzone an

b) Bestimme den maximalen Gewinn

c) Bei welcher Produktionsmenge sind die Stückkosten minimal?

d) Das Unternehmen wird durch widrige Umstände (z.B. Planwirtschaft) dazu gezwungen 400 Einheiten zu produzieren und sie für 12,50 GE zu verkaufen, kann so noch ein Gewinn erwirtschaftet werden?

A 4

Gegeben sind die Funktionen $f(x) = x^2$ und $g(x) = \frac{1}{x}$, unter welchem Winkel schneiden sich die beiden Graphen?

CC BY NC SA

A 5 Abi'04 - WTA 1.1

Gegeben ist eine Funktion f durch $f(x) = \dfrac{x^2 - 36}{x^2 + 16}$. Ihr Schaubild sei K.

a) Zeichne K. Untersuche das Verhalten von K für $|x| \to \infty$. Weise nach, das K genau zwei Wendepunkte besitzt (Quotientenregel).

Nun stelle K für $-6 \leq x \leq 6$ den Querschnitt eines $500\,m$ langen Kanals dar (x und $f(x)$ in Meter). Die sich anschließende Landfläche liegt auf der Höhe $y = 0$. Der Pegelstand wird in Bezug auf den tiefsten Punkt des Kanals gemessen und beträgt maximal $2{,}25\,m$.

b) Wie viel Kubikmeter Wasser sind in dem Kanal, wenn er ganz gefüllt ist? Zu wie viel Prozent ist der Kanal bei einem Pegelstand von $1{,}00\,m$ gefüllt?

c) An Land steht eine Person. In welcher Entfernung vom Kanalrand darf sie höchstens stehen, damit sie bei leerem Kanal die tiefste Stelle des Kanals sehen kann (Augenhöhe $1{,}50\,m$)?

A 6 Abi'06 - WTA 3.1

Durch $f(t) = 20t \cdot e^{-0{,}5t}$ wird die Konzentration eines Medikaments im Blut eines Patienten beschrieben. Dabei wird t in Stunden seit der Einnahme und $f(t)$ in $\frac{mg}{l}$ gemessen. Die folgende Betrachtungen sind nur für die Zeitspanne der ersten 12 Stunden nach der Einnahme des Medikaments durchzuführen.

a) Skizziere den zeitlichen Verlauf der Konzentration. Nach welcher Zeit erreicht die Konzentration ihren höchsten Wert? Wie groß ist dieser höchste Wert? Das Medikament ist nur wirksam, wenn seine Konzentration im Blut mindestens $4\frac{mg}{l}$beträgt. Berechne die Zeitspanne, in der das Medikament wirksam ist. Wie hoch ist die mittlere Konzentration innerhalb der ersten 12 Stunden ?

b) Zu welchem Zeitpunkt wird das Medikament am stärksten abgebaut? Wie groß ist zum Zeitpunkt $t = 4$ die momentane Änderungsrate der Konzentration? Ab diesem Zeitpunkt wird die Konzentration des Medikaments nun näherungsweise durch die Tangente an das Schaubild von f an der Stelle $t = 4$ beschrieben. Bestimme damit den Zeitpunkt, zu dem das Medikament vollständig abgebaut ist.

c) Anstelle der Näherung aus Teilaufgabe b) wird nun wieder die Beschreibung der Konzentration durch f verwendet. Vier Stunden nach der ersten Einnahme wird das Medikament in der gleichen Dosierung erneut eingenommen. Es wird angenommen, dass sich dabei die Konzentration im Blut des Patienten addiert. Skizziere den zeitlichen Verlauf der Gesamtkonzentration für $0 \leq t \leq 12$. Die Konzentration des Medikaments im Blut darf $20\frac{mg}{l}$ nicht übersteigen. Wird diese Vorgabe in diesem Fall eingehalten ?

d) Das Medikament wird nun in seiner Zusammensetzung verändert. Die Konzentration des Medikaments im Blut wird durch $g(t) = at \cdot e^{-bt}$ mit $a > 0$ und $b > 0$ beschrieben. Dabei wird t in Stunden seit der Einnahme und $g(t)$ in $\frac{mg}{l}$ gemessen. Bestimme die Konstanten a und b, wenn die Konzentration vier Stunden nach der Einnahme ihren größten Wert $10\frac{mg}{l}$ erreicht.