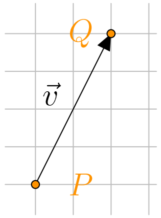
13 Vektoren

Wird der Punkt $P(1|1)$ auf $Q(2|3)$ durch eine Verschiebung abgebildet, so wird $R(3|0)$ durch die selbe Verschiebung auf $S(4|2)$ abgebildet. Die Verschiebung um eine Einheit nach „rechts“ und zwei Einheiten nach „oben“ kann man auch als Vektor angeben:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS}$$



Alle Pfeile, die in Länge (Betrag) und Richtung übereinstimmen repräsentieren den gleichen Vektor (die gleiche Verschiebung)!

Ortsvektor

Der spezielle Repräsentant eines Vektors $\vec{p}$, der vom Ursprung O zum Punkt P zeigt nennt man den Ortsvektor von P und schreibt $\vec{p}$ oder $\overrightarrow{OP}$

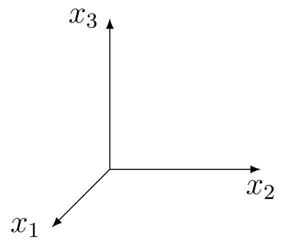
Verbindungsvektor

Den Vektor $\overrightarrow{PQ}$, der vom Punkt P auf den Punkt Q zeigt, kann man ermitteln durch:

$$\overrightarrow{PQ} = \vec{q} - \vec{p}$$

13.1 3D

Um eine dritte Dimension auf einem zweidimensionalen Blatt anzudeuten, verwendet man eine dritte Achsen im Koordinatensystem. Eine „Kästchendiagonale“ entspricht dabei einer Einheit, wenn auf den anderen Achsen 2 Kästchen einer Einheit entsprechen (Stauchung mit Faktor $\sqrt{2}$)



13.2 Rechnen mit Vektoren

Addition & Subtraktion

$$\vec{a} \pm \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \pm b_1 \\ a_2 \pm b_2 \\ a_3 \pm b_3 \end{pmatrix}$$

Beispiel

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Vielfaches

$$r \cdot \vec{v} = r \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot v_1 \\ r \cdot v_2 \\ r \cdot v_3 \end{pmatrix}$$

Beispiel

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Skalarprodukt

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

Achtung: das Ergebnis ist eine Zahl, kein Vektor!

Beispiel

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 0 + 2 \cdot (-2) + 3 \cdot 1 = -1$$

Die Länge eine Vektors nennt man auch seinen Betrag:

$$|\vec{a}| = a = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Beispiel

$$\left| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$$

Winkel zwischen Vektoren

Für den Winkel α zwischen 2 Vektoren gilt:

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

Beispiel

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \cos(\alpha) &= \frac{1 \cdot (-3) + 4 \cdot 3 + (-2) \cdot 1}{\sqrt{1^2 + 4^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{(-3)^2 + 3^2 + 1^2}} \\ &= \frac{7}{\sqrt{21} \cdot \sqrt{19}} \\ \alpha &= 69,5^\circ \end{aligned}$$

Insbesondere stehen also 2 Vektoren genau dann senkrecht (orthogonal) zueinander wenn ihr Skalarprodukt 0 ergibt.

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{b}$$

Kreuzprodukt

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Achtung: das Ergebnis ist ein Vektor und es gilt $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$, das Kreuzprodukt ist also **nicht** kommutativ.

Insbesondere gilt $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} \Rightarrow \vec{c} \perp \vec{a}$ und $\vec{c} \perp \vec{b}$. Darüber hinaus gibt sogar $|\vec{c}|$ den Flächeninhalte des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramm an.

Beispiel

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 2 - 1 \cdot 3 \\ 1 \cdot 1 - 0 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Fläche des Parallelogramm beträgt:

$$\left| \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{6}$$

Die Vektoren stehen senkrecht zueinander, denn

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot (-2) + 1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-2) + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 0$$

Vektoren

Pirmin Gohn
Hans-Thoma-Gymnasium, Lörrach

„Die Menschen, die etwas von heute auf morgen verschieben, sind dieselben, die es bereits von gestern auf heute verschoben haben.“
Peter Ustinov