12 Wachstum

Man unterscheidet verschiedene Arten des Wachstums. Betrachtet man die Änderungsraten (Ableitung), so stellt man verschiedenen Zusammenhänge fest die sich leicht durch eine Differenzialgleichung beschreiben lassen, welche charakteristisch für die Wachstumsart ist.

Das Wachstumsgesetz einer jeden Wachstumsart ist eine Lösung der Differenzialgleichung des entsprechenden Wachstums, was man durch Ableiten des Wachstumsgesetz leicht überprüfen kann.

Legt der Bestand nicht zu, sondern wird der Bestand immer geringer, so redet man oft auch von einem „Zerfall“, was eigentlich nichts anderes als ein negatives Wachstum ist. Die angegebene Funktionsgleichungen stimmen jedoch weiterhin!

12.1 Differenzialgleichung

Differenzialgleichung

Eine Differenzialgleichung stellt eine Beziehung zwischen einer Funktion und mindestens einer ihrer Ableitungen her. Die Lösungen einer Differenzialgleichung sind Funktionen und keine Zahlen.

Beispiel

$f'(x) = f(x)$ ist eine Differenzialgleichung, es wird dabei eine Funktion gesucht, die mit ihrer Ableitung übereinstimmt. Eine Lösung dieser Differenzialgleichung wäre also $f(x) = e^x$, aber auch $f(x) = 0$

12.2 lineares Wachstum

Die Differenzialgleichung des linearen Wachstums lautet:

$$B'(t) = k$$

Die Änderungsrate $B'(t)$ des Bestandes $B(t)$ ist somit konstant und nimmt pro Zeiteinheit also immer um den selben Wert zu. Eine Lösung dieser Differenzialgleichung ist das Wachstumsgesetz

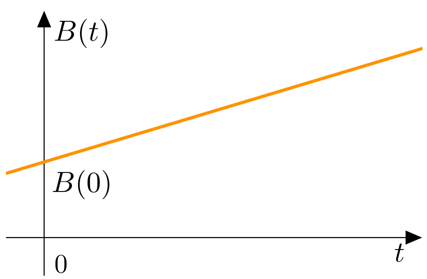
$$B(t) = k \cdot t + B(0)$$

wobei $B(0)$ für den Anfangsbestand ($t = 0$) steht.

Beispiel

Ein Baggersee mit einer Fläche von $1200\,\mathrm{m}^2$ wird durch regelmäßigen Kiesabbau erweitert. Alle 2 Arbeitstage wird die Wasseroberfläche um $120\,\mathrm{m}^2$ größer.
Es gilt also:

$$\begin{aligned} B(t) &= 60 \cdot t + 1200 \\ B'(t) &= 60 \end{aligned}$$



12.3 exponentielles Wachstum

Die Differenzialgleichung des exponentiellen Wachstums lautet:

$$B'(t) = k \cdot B(t)$$

Die Änderungsrate ist proportional zum Bestand und das Wachstumsgesetz lautet:

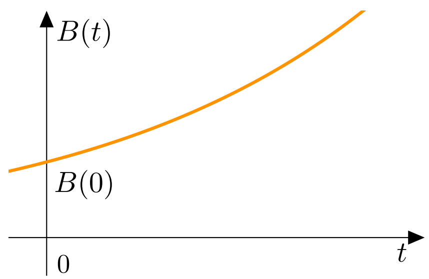
$$B(t) = B(0) \cdot e^{k \cdot t} = B(0) \cdot a^t$$

mit $k = \ln(a)$ und $a > 0$

Beispiel

In einem Ozean vergrößert sich die von Algen bedeckte Fläche alle 3 Tage um 10 %. Zu Beginn ist eine Fläche von $120\,\mathrm{m}^2$ bedeckt.

$$\begin{aligned} B(t) &= B(0) \cdot 3^{\frac{t}{3}} \\ B(t) &= B(0) \cdot \left(3^{\frac{1}{3}}\right)^t \\ B(t) &= B(0) \cdot \sqrt[3]{3}^t \\ B(t) &= B(0) \cdot e^{ln(\sqrt[3]{3}) \cdot t} \\ B'(t) &= ln(\sqrt[3]{3}) \cdot B(t) \end{aligned}$$



12.4 beschränktes Wachstum

Die Differenzialgleichung des beschränkten Wachstums lautet:

$$B'(t) = k \cdot (S - B(t))$$

Die Änderungsrate ist proportional zum Sättigungsmanko $S - B(t)$ (Differenz zwischen Bestand und Schranke), wobei S die Schranke angibt und das Wachstumsgesetz lautet:

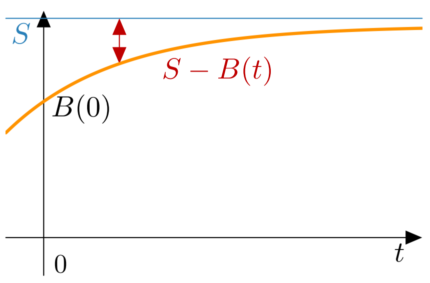
$$B(t) = S - c \cdot e^{-k \cdot t}$$

Achtung: $c \neq B(0)$, c ist das „Anfangssättigungsmanko“ also $B(0) = S - c$ und somit $c = S - B(0)$

Beispiel

In einem See der Fläche $1200\,\mathrm{m}^2$ sind zu Beginn $120\,\mathrm{m}^2$ von Algen bedeckt, pro Tag werden $10\,\%$ der noch nicht bedeckten Fläche von den Algen „erobert“.

$$\begin{aligned} B'(t) &= 0,1 \cdot (1200 - B(t)) \\ &= 120 - 0,1 \cdot B(t) \\ B(t) &= 1200 - \underbrace{1080}_{=1200-120} \cdot e^{-0,1 \cdot t} \end{aligned}$$



12.5 Sonderfälle

12.5.1 linearer Zerfall

Der Bestand nimmt konstant ab, d.h. die Konstante k ist negativ.

12.5.2 exponentieller Zerfall

Je nach Notation ist entweder $a < 1$ (jedoch $a > 0$)) oder $k < 0$

12.5.3 Verzinsung

Gleichmäßig verzinstes Kapital mit dem Zinsatz $p\,\%$ beschreibt ein exponentielles Wachstum der Form:

$$K(t) = K(0) \cdot \left(\underbrace{1 + \frac{p}{100}}_{=a}\right)^t$$

12.5.4 beschränkter Zerfall

Für $c < 0$ liegt der Anfangsbestand oberhalb der Schranke S. Der Bestand verringert sich in Abhängigkeit der Differenz zur Schranke und nähert sich dieser an. Achtung k muss hier immer positiv sein!

HTG lyrelda.de 3Gn14

Wachstum

Pirmin Gohn
Hans-Thoma-Gymnasium, Lörrach

„Wüchsen die Kinder in der Art fort, wie sie sich andeuten, so hätten wir lauter Genies.“
Johann Wolfgang von Goethe