11 Integral

11.1 Stammfunktion

Stammfunktion

Eine Stammfunktion $F(x)$ zu einer Funktion $f(x)$ ist durch $F'(x) = f(x)$ definiert.

Es ist deutlich einfacher eine Ableitung zu finden, als eine Stammfunktion. Ist $F(x)$ eine Stammfunktion von f, so ist auch $G(x) = F(x) + c$ eine Stammfunktion von f.

$f(x)$	$F(x)$
0	1
1	x
c	$c \cdot x$
x^r	$\frac{1}{r+1}x^{r+1}$
$\frac{1}{x}$	$\ln(\lvert x \rvert)$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$
$\cos(x)$	$\sin(x)$
e^x	e^x

Beispiel

$$f(x) = 5 \qquad F(x) = 5x$$
$$f(x) = x^3 \qquad F(x) = \frac{1}{4}x^4$$
$$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \qquad F(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$$

11.1.1 Regeln für Stammfunktionen

Summen- & Faktorregel

Sei $f(x) = g(x) + h(x)$ eine Summe von Funktionen, so ist die Stammfunktion von F die Summe der Stammfunktionen der Teilfunktionen $F(x) = G(x) + H(x)$.
Ein Vorfaktor vor einer Funktion bleibt unverändert $f(x) = 3g(x)$ und $F(x) = 3G(x)$

Beispiel

$$f(x) = 3x^2 \qquad F(x) = 3\frac{1}{3}x^3 = x^3$$
$$f(x) = x^2 + \sin(x) \qquad F(x) = \frac{1}{3}x^3 - \cos(x)$$
$$f(x) = 3x^2 + 2\cos(x) \qquad F(x) = x^3 + \sin(x)$$

Lineare Verkettung

Sei $f(x) = g(rx + c)$ so ist $F(x) = \frac{1}{r}G(rx + c)$

Beispiel

$$f(x) = \sin(3x + 2) \qquad F(x) = -\frac{1}{3}\cos(3x + 2)$$
$$f(x) = e^{2x+1} \qquad F(x) = \frac{1}{2}e^{2x+1}$$
$$f(x) = (3x + 4)^3 \qquad F(x) = \frac{1}{3}\frac{1}{4}(3x + 4)^4 = \frac{1}{12}(3x + 4)^4$$
$$f(x) = \sqrt{-4x - 2} \qquad F(x) = \frac{1}{-4}\frac{1}{2}(-4x - 2)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{8\sqrt{-4x - 2}}$$

Es ist oft hilfreich eine Funktion f um zu formen um leichter eine Stammfunktion bestimmen zu können. Nützlich ist das Anwenden einer binomischen Formel oder das Auseinanderziehen eines Bruches.

Beispiel

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 6x + 9} = \frac{1}{(x - 3)^2} = (x - 3)^{-2}$$
$$g(x) = \frac{3}{x^2 + 4x + 4} = \frac{3}{(x + 2)^2} = 3(x + 2)^{-2}$$
$$h(x) = \frac{x^2 + 3}{x} = \frac{x^2}{x} + \frac{3}{x} = x + 3x^{-1}$$

Falls du dir nicht sicher bist, ob du wirklich eine Stammfunktion gefunden hast, so mach die Probe und leite die Stammfunktion ab!

11.2 Integral

Hauptsatz

Das Integral von a bis b über $f(x)\,dx$ ist definiert als:

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Beispiel

$$\int_0^3 x^2\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^3 = \frac{1}{3}3^3 - \frac{1}{3}0^3 = 9$$
$$\int_\pi^{2\pi} \sin(x)\,dx = [-\cos x]_\pi^{2\pi} = -\cos(2\pi) + \cos(\pi) = -1 + (-1) = -2$$

11.2.1 Rechenregeln

Gleichheit der Grenzen

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

Vertauschung der Grenzen

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

Intervalladditivität

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$$

Summen- & Faktorregel

$$c\int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b c\cdot f(x) + g(x)\,dx$$

11.2.2 Flächeninhalt

Das Integral kann als die orientierte Fläche zwischen dem Funktionsgraphen der Funktion f, der x-Achse und den Grenzen a und b aufgefasst werden. Flächen unter der x-Achse sind dabei negativ! Möchte man also Flächen berechnen, so muss man zuerst die Nullstellen bestimmen und die Flächen aufteilen!

Beispiel

Fläche zwischen $f(x) = 3x^2 - 1$ und der x-Achse im Intervall $[0; 2]$. Da es eine Nullstelle bei $x_1 = 1$ gibt:

$$\begin{aligned} A &= \left|\int_0^1 3x^2 - 1\,dx\right| + \left|\int_1^2 3x^2 - 1\,dx\right| \\ &= \left|\left[x^3 - x\right]_0^1\right| + \left[x^3 - x\right]_1^2 \\ &= \left|1^3 - 1 - (0^3 - 0)\right| + (2^3 - 2) - (1^3 - 1) = 6 \end{aligned}$$

11.2.3 Fläche zwischen zwei Funktionen

Für die Fläche zwischen zwei Funktionen gilt:

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx$$

11.2.4 Rotationskörper

Das Schaubild einer Funktion f rotiert im Intervall $[a; b]$ um die x-Achse, das Volumen ist dann gegeben durch:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx$$

Achtung zuerst die Funktion f quadrieren und dann integriere und nicht umgekehrt!

11.2.5 Mittelwert einer Funktion

Der Mittelwert einer Funktion im Intervall $[a; b]$ ist:

$$\overline{m} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

11.2.6 Uneigentliche Integrale

Ist einer der beiden Grenzen eines Integrals $\pm\infty$ oder eine Polstelle, so lässt sich das Integral (Fläche) als Grenzwert darstellen.

Beispiel

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{z\to\infty}\left[\frac{1}{3}\right]_1^z = \lim_{z\to\infty} -\frac{1}{z} - \left(-\frac{1}{1}\right) = 1$$

11.3 Von der Änderung zum Bestand

In vielen Aufgaben ist eine Änderungsrate eines „Bestandes“ (Geschwindigkeit, Ablussrate, Abbaurate usw.) gegeben, meistens wird dann auch nach dem Bestand (zurückgelegte Strecke, Wassermenge, Menge) gefragt, was dem Integral entspricht!

lyrelda.de

Integrale

Pirmin Gohn

Hans-Thoma-Gymnasium, Lörrach

„Wenn wir Wurzeln hegen, so pflegen wir Stamm und Früchte.“ Martin Emil Riker