10 Ableitungen

10.1 Grundwissen

Der Anstieg der Funktion f an der Stelle x_0 wird als die Ableitung der Funktion f an der Stelle x_0 bezeichnet (*kurz:* $f'(x_0)$). Diese Steigung ist identisch zur Steigung der Tangente an die Funktion f an der Stelle x_0. Oft werden auch die Begriffe *momentane Änderungsrate* und *Änderungsverhalten* benutzt.

An jedem Extrempunkt ist die Tangente waagerecht und somit muss dort gelten $f(x_{EP}) = 0$, jedoch folgt nicht aus $f(x_1) = 0$, das an der Stelle ein Extrempunkt der Funktion f sein muss, es kann auch ein Sattelpunkt sein.

Bildet man die die zweite Ableitung f'' der Funktion f, also die Ableitung der Ableitung von f, so gibt diese das Krümmungsverhalten an. Ist die 2. Ableitung an einer Stelle x_0 positiv, so mach die ursprüngliche Funktion an dieser Stelle eine Linkskurve, ist sie negativ, so ist es eine Rechtskurve.

10.2 einfache Ableitungsregeln

Funktion $f(x)$	Ableitung $f'(x)$	Bemerkung
c	0	Konstante
x	1	
$\sin(x)$	$\cos(x)$	
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	
e^x	e^x	
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	$x \geq 0$

10.3 wichtige Ableitungsregeln

Potenzregel

Ist $f(x) = x^r$ eine Potenzfunktion mit $r \in \mathbb{R}$, dann ist $f'(x) = r \cdot x^{r-1}$

Beispiel

$f(x)$	$f'(x)$
x^2	$2x$
x^7	$7x^6$
$\frac{1}{x^2} = x^{-2}$	$-2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$
$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Faktorregel

Ist $f(x) = c \cdot g(x)$ mit $c \in \mathbb{R}$,
dann ist $f'(x) = c \cdot g'(x)$.
(*Ein konstanter Faktor bleibt erhalten*)

Beispiel

$f(x) = 3 \cdot x^2$ und $f'(x) = 3 \cdot 2 \cdot x = 6 \cdot x$

Summenregel

Ist $f(x) = g(x) + h(x)$,
dann ist $f'(x) = g'(x) + h'(x)$
(*Die Ableitung der Summe zweier Funktionen ist die Summe der Ableitungen der beiden Funktionen*)

Beispiel

$f(x) = 3 \cdot x^2 + \sin(x)$
$f'(x) = 3 \cdot 2 \cdot x - \cos(x) = 6 \cdot x - \cos(x)$

Produktregel

Sind die Funktion u und v differenzierbar (ableitbar), so ist auch die Funktion $f = u \cdot v$ mit $f(x) = u(x) \cdot v(x)$ differenzierbar, und es gilt:

$$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

Beispiel

(1) $f(x) = x^2(x-2)$

$$\begin{aligned} u(x) &= x^2 & u'(x) &= 2x \\ v(x) &= x-2 & v'(x) &= 1 \\ f'(x) &= u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) \\ &= 2x \cdot (x-2) + x^2 \cdot 1 = \underline{\underline{3x^2 - 4x}} \end{aligned}$$

(2) $f(x) = x^3 \cos(x)$

$$\begin{aligned} u(x) &= x^3 & u'(x) &= 3x^2 \\ v(x) &= \cos(x) & v'(x) &= -\sin(x) \\ f'(x) &= u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) \\ &= 3x^2 \cdot \cos(x) + x^3 \cdot (-\sin(x)) \\ &= \underline{\underline{3x^2 \cos(x) - x^3 \sin(x)}} \end{aligned}$$

Quotientenregel

Sind die Funktioen u und v differenzierbar, so ist auch die Funktion $f = \frac{u}{v}$ mit $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ differenzierbar, und es gilt:

$$f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)}$$

Beispiel

(1) $f(x) = \frac{x^3}{x-2}$

$u(x) = x^3 \qquad u'(x) = 3x^2$

$v(x) = x - 2 \qquad v'(x) = 1$

$$f'(x) = f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)}$$
$$= \frac{3x^2(x-2) - x^3 \cdot 1}{(x-2)^2}$$
$$= \underline{\underline{\frac{2x^3 - 6x^2}{(x-2)^2}}}$$

Kettenregel

Ist $f = u \circ v$ eine Verkettung zweier differenzierbarer Funktionen u und v, so ist auch f differenzierbar, und es gilt:

$$f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$$

(*äußere mal innere Ableitung*)

Beispiel

$f(x) = \frac{2}{x^3 - 4}$

$v(x) = x^3 - 4 \qquad v'(x) = 3x^2$

$u(x) = \frac{2}{x} = 2x^{-1} \qquad u'(x) = -2x^{-2} = \frac{-2}{x^2}$

$$f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$$
$$= \frac{-2}{(x^3-4)^2} \cdot 3x^2 = \underline{\underline{\frac{-6x^2}{(x^3-4)^2}}}$$

Beispiel

$f(x) = (3 - 2x)^3$

$v(x) = 3 - 2x \qquad v'(x) = -2$

$u(x) = x^3 \qquad u'(x) = 3x^2$

$$f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$$
$$= 3(3-2x)^2 \cdot (-2) = \underline{\underline{-6(3-2x)^2}}$$

10.4 Zusammenhang zwischen einer Funktion und ihren Ableitungen

Monotonie

Das Vorzeichen von $f'(x)$ gibt an ob Funktion steigt (+) oder fällt (-).

lokale Extrempunkte

An der Stelle x_0, an der f einen lokalen Extrempunkt hat, ist $f'(x_0) = 0$. Ist $f''(x_0) < 0$ so ist es ein Hochpunkt, ist $f''(x_0) > 0$ so ist es ein Tiefpunkt. (Ist $f''(x_0) = 0$ so kann es auch ein Sattelpunkt sein)

Krümmungsverhalten

Das Vorzeichen von $f''(x)$ gibt an ob die Funktion linksgekrümmt (+) oder rechtsgekrümmt (-) ist.

Wendepunkte

An der Stelle x_0, an der f einen Wendepunkt hat, ist $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$. Ist dazu noch $f'(x_0) = 0$, so liegt ein Sattelpunkt vor.

Ableitungen

Pirmin Gohn
Hans-Thoma-Gymnasium, Lörrach

„Es ist dumm, sich am eigenen Fortschritt zu hindern, indem man seine Fehler verteidigt anstatt sie anzunehmen und zu verbessern. Jedoch ist es der Großteil der Menschen, die diesen Fehler begehen.“ Martin A. Voigt