9 Stochastik

9.1 Grundlagen

Definition

Ein **Zufallsexperiment** ist ein Versuch, bei welchem keine Vorhersage getroffen werden kann, welches Ergebnis auftreten wird, es lassen sich jedoch vor dem Versuch alle möglichen Ergebnisse angeben.
Bei einem Zufallsexperiment gibt es verschiedene **Ergebnisse**, diese ergeben zusammen die Ergebnismenge S. Fasst man mehrere Ergebnisse zusammen, so spricht man von einem **Ereignis** E.

Beim Würfeln mit einem Standard-Würfel gibt es die 6 Ergebnisse „Würfel zeigt Augenzahl 1“, „Würfel zeigt Augenzahl 2“,... und „Würfel zeigt Augenzahl 6“. Dies ist ein Zufallsexperiment, da es unter gleichen Voraussetzungen beliebig oft wiederholt werden kann. Die Ergebnismenge S ist $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, ein Ereignis wäre zum Beispiel „Augenzahl ist gerade“ $E_{gerade} = \{2, 4, 6\}$.

Definition

Ordnet man jedem Ergebnis einen Wert k (reelle Zahl) zu, so bezeichnet man diese Zuordnung (Funktion) als **Zufallsvariable**, meistens verwendet man dafür X. Jeder Wert k der Zufallsvariable tritt mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit $P(X = k)$ auf. Die Zuordnung P nennt man **Wahrscheinlichkeitsverteilung** und sie wird oft in einer Tabelle dargestellt.

Satz

Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ergibt sich durch addieren der Wahrscheinlichkeiten der zugehörigen Ergebnisse. Summiert man die Wahrscheinlichkeiten aller Ergebnisse auf, so muss dies stets 1 (100 %) ergeben.

Ein Glücksrad ist zur Hälfte „grün“, und jeweils zu einem Viertel „rot“ bzw. „blau“. Eine Zufallsvariable wäre also eine Zuordnung, die diesen Ergebnissen einen Wert zuordnet z.B. $X(grün) = 1$, $X(rot) = 2$ und $X(blau) = 3$.

In der Hälfte der Fälle ist „grün“ zu erwarten was dem Wert k=1 zugeordnet wurde, die Wahrscheinlichkeit für „grün“ ist also $P(grün) = P(X = 1) = \frac{1}{2}$. Dies führt zu folgender Tabelle für die Wahrscheinlichkeitsverteilung P:

Ereignis	grün	rot	blau
X(Ereignis) = k	1	2	3
$P(X = k)$	$\frac{1}{2} = 50\%$	$\frac{1}{4} = 25\%$	$\frac{1}{4} = 25\%$

Die Wahrscheinlichkeit für „rot“ oder „blau“ ergibt sich durch Addition: $P(X > 1) = P(X = 2) + P(X = 3) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ (alle Wahrscheinlichkeiten ergeben zusammen 1, was leicht nach zu rechnen ist).

9.2 Laplace-Experiment

Definition

Treten alle n möglichen Ergebnisse mit der gleichen Wahrscheinlichkeit auf so nennt man ein solches Experiment ein Laplace-Experiment.

Satz

Da jedes Ergebnis mit der Wahrscheinlichkeit p auftritt muss gelten:

$$\underbrace{p + p + \cdots + p}_{n-mal} = 1 \quad \Rightarrow \quad p = \frac{1}{n}$$

$$p = P(\text{Ergebnis}) = \frac{1}{\text{Anzahl der möglichen Ergebnisse}}$$

für ein Ereignis E aus m Ergebnissen, folgt $P(E) = m \cdot p$

$$p = P(\text{Ereignis}) = \frac{\text{Anzahl der günstigen Ergebnisse}}{\text{Anzahl der möglichen Ergebnisse}}$$

9.3 Gegenereignis

Definition

Das Ereignis $\bar{A}$ nennt man Gegenereignis zu A und bedeutet, das NICHT A eintritt.

Oftmals ist es leichter $P(\bar{A})$ aus zu rechnen als $P(A)$. Da die Summe der Wahrscheinlichkeiten für A und $\bar{A}$ zusammen 1 sein müssen, folgt:

Satz

$$P(A) = 1 - P(\bar{A})$$

Beim Würfeln ist jeder Augenzahl gleich wahrscheinlich $p = P(1) = \frac{1}{6}$. Wollen wir jedoch die Wahrscheinlichkeit für das werfen einer geraden Augenzahl: $p = P(\text{gerade}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. Will man berechnen wie wahrscheinlich es ist eine Augenzahl zu werfen, die kleiner als 6 ist, so kann man entweder die Wahrscheinlichkeiten für 1 bis 5 addieren oder man geht über das Gegenereignis, also NICHT 6. $P(\bar{6}) = 1 - P(6) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.

9.4 Häufigkeiten und Erwartungswert

Definition

Wenn bei n Zufallsexperiment n_A mal das Ergebnis A aufgetreten ist, so heißt n_A die **absolute** Häufigkeit und $\frac{n_A}{n}$ die **relative** Häufigkeit des Eintretens von A.

Gesetz der großen Zahl

Für eine Statistik werden n Zufallsexperimente unter den gleichen Bedingungen und unabhängig voneinander durchgeführt. Dabei spielt es keine Rolle, ob die Experimente gleichzeitig oder hintereinander ausgeführt werden, solange sie sich nicht gegenseitig beeinflussen. Dann strebt die relative Häufigkeit $\frac{n_A}{n}$ für das Ergebnis A mit steigernder Anzahl n der Zufallsexperimente gegen die Wahrscheinlichkeit $P(A)$.

Reißnägel unterscheiden sich stark, es ist schwer vorhersagbar ob er nun auf der Fläche oder der Nadel landet. Wenn man 1000 mal einen Reißnagel wirft so bekommt man z.B. 632 mal „Fläche“ - das ist die absolute Häufigkeit und
$\frac{632}{1000} = 63,2\,\%$ die relative Häufigkeit. Je mehr Experimente man durchführt, desto besser wird die relative Häufigkeit als Näherungswert für $P(Fläche)$. Dieses Beispiel wäre sicherlich ausreichend um $P(Fläche) \approx 0,63$ fest zu legen

Definition

Der Erwartungswert $E(X)$ einer Zufallsvariablen X ist der Wert, dem sich der Mittelwert der Zufallsvariablen bei sehr häufiger Wiederholung einpendelt. Kennt man die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariablen X, so gilt:

$$E(X) = x_1 \cdot P(X = x_1) + x_2 \cdot P(X = x_2) + x_3 \cdot P(X = x_3) + \cdots$$

Für eine Zufallsvariable X, sei folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung gegeben:

k	0	1	2	3
$P(X = k)$	0,5	0,3	0,05	0,15

$$E(X) = 0 \cdot 0,5 + 1 \cdot 0,3 + 2 \cdot 0,05 + 3 \cdot 0,15 = 0,85$$

Die Interpretation ist, dass bei häufiger Wiederholung im Durchschnitt 0,85 eingetreten ist! Man kann sich vorstellen, dass es eine Lotterie war, bei welche k den Gewinn angibt, so wäre im Durchschnitt 0,85 gewonnen worden. (Man sollte also nicht mehr als 0,85 für solch eine Lotterie ausgeben, wenn man langfristig nicht verlieren will)

9.5 Mehrstufige Zufallsexperimente

Pfadmultiplikationsregel

In einem Baumdiagramm erhält man die Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses durch Multiplikation aller Wahrscheinlichkeiten des Pfades, der zu dem gewünschten Ergebnis führt.

9.6 Kombinatorik

(1) Aus einer Urne mit n Kugeln wird k mal mit Zurücklegen gezogen. Dann gibt es $\underbrace{n \cdot n \cdots n}_{k-mal} = n^k$ verschiedenen Ergebnisse.

(2) Aus einer Urne mit n Kugeln wird k mal ohne Zurücklegen gezogen. Dann gibt es $n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)$ verschiedenen Ergebnisse.

(3) Aus einer Urne mit n Kugeln werden alle n Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. Dann gibt es $n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1 = n!$ („n Fakultät“) verschiedenen Ergebnisse.

(4) Aus einer Urne mit n Kugeln wird k mal ohne Zurücklegen gezogen. Jeweils alle k! Ergebnisse mit gleicher Auswahl aber unterschiedlicher Reihenfolge der k Kugeln werden als Kombination zusammengefasst. Dann gibt es $\frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}$ mögliche Kombinationen. Die Zahlen $\binom{n}{k}$ („n über k“) nennt man Binomialkoeffizent.

Es gibt $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten, aus n verschiedenen Objekten k Objekte auszuwählen.

Lotto - 6 Kugeln aus 49, dabei ist die Reihenfolge egal. Es gibt also $49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44$ Möglichkeiten, wenn die Reihenfolge wichtig wäre. Für jede 6er-Serie gibt es $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ Varianten der Reihenfolge. Es gibt also insgesamt $\frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{49!}{(49-6)!6!} = \binom{49}{6} = 13983816$ Möglichkeiten

9.7 Bernoulli

Definition

Ein Zufallsexperiment mit nur zwei interessanten Ergebnissen heißt ein **Bernoulli-Experiment**. Die Ergebnisse bezeichnet man als Treffer und Nieten mit der Trefferwahrscheinlichkeit p und der Nietenwahrscheinlichkeit $q = 1 - p$. Wird ein Bernoulli-Experiment n-mal wiederholt und ändert sich dabei die Wahrscheinlichkeit nicht, so spricht man von einer n-stufigen **Bernoulli-Kette**.

9.8 Binomialverteilung

Definition

Gegeben ist eine n-stufige Bernoulli-Kette mit Erfolgswahrscheinlichkeit p $(q = 1 - p)$ und
Zufallsvariable X: Anzahl der Erfolge
Die Wahrscheinlichkeit für k Erfolge beträgt:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$

als verkürzte Schreibweise $B_{n,p}(k)$

Eine Tabelle mit den Wahrscheinlichkeiten für die n-fache Erfolge wird als „Binomialverteilung“ bezeichnet. Den Erwartungswert einer binomialverteilten Zufallsvariablen erhält man durch $E(X) = n \cdot p$

.

Ein Glücksrad (rot-weiß) wird 7 mal gedreht, k ist die Anzahl der Treffer (weiß), gesucht wird diejeweilige Anzahl der Pfade für k Treffer. (von Hand gerechnet beachte 0! =1, ansonsten „nCr“)

für $k = 4$ gibt es $\binom{7}{4} = \frac{7!}{4!3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = = 35$ Pfade

9.9 stochastische Unabhängigkeit

Definition

Sind A und B zwei Mengen, so gehören zur Menge $A \cap B$ alle Elemente die zu A und auch zu B gehören (Schnittmenge)

Zwei Ereignisse A und B heißen unabhängig voneinander, wenn gilt:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

In einer Urne sind 3 Kugeln welche nummeriert sind. Es wird zweimal mit zurücklegen gezogen. Wir betrachten 4 Ereignisse

- E_1: im ersten Zug eine 1 mit $P(E_1) = \frac{1}{3}$
- E_2: im zweiten Zug eine 3 mit $P(E_2) = \frac{1}{3}$
- E_3: Beide Zahlen sind ungerade mit $P(E_4) = \frac{4}{9}$

$$\left.\begin{array}{l} P(E_1 \cap E_2) = \frac{1}{9} \ \textit{nur \{1;3\} passt} \\ P(E_1) \cdot P(E_2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9} \end{array}\right\} E_1 \text{ und } E_2 \text{ sind unabhängig}$$

$$\left.\begin{array}{l} P(E_1 \cap E_3) = \frac{2}{9} \ \textit{\{1;3\} und \{1;1\}} \\ P(E_1) \cdot P(E_3) = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{9} = \frac{4}{27} \end{array}\right\} E_1 \text{ und } E_3 \text{ sind abhängig}$$

Stochastik

Pirmin Gohn
Hans-Thoma-Gymnasium, Lörrach

„Wenn du einmal Erfolg hast, kann es Zufall sein. Wenn du zweimal Erfolg hast, kann es Glück sein. Wenn du dreimal Erfolg hast, so ist es Fleiß und Tüchtigkeit“ Unbekannt