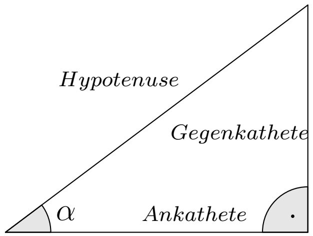
8 Trigonometrische Funktionen

8.1 Trigonometrie

In einem rechtwinkligen Dreieck stehen die Seitenverhältnisse in Beziehung zu den Winkeln. Man kann daher die Winkel über die Seitenverhältnisse im Dreieck bestimmen.



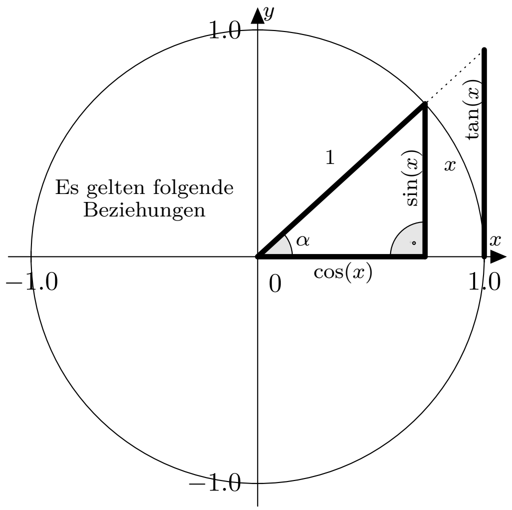
$$\sin(\alpha) = \frac{\textit{Gegenkathete}}{\textit{Hypotenuse}}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\textit{Ankathete}}{\textit{Hypotenuse}}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{\textit{Gegenkathete}}{\textit{Ankathete}} = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

8.2 Einheitskreis

Den Kreis mit Radius 1 um den Origo nennt man den Einheitskreis. Sein Umfang beträgt $U = 2\pi$. Statt Winkelweiten im Gradmaß ($0° \leq \alpha \leq 360°$) kann man diese auch im Bogenmaß ($0 \leq x \leq 2\pi$) angeben.



Umrechnung

$$\alpha = \frac{x}{\pi} \cdot 180° \qquad x = \frac{\alpha}{180°} \cdot \pi$$

Damit kann man sich die Werte & Vorzeichen leicht herleiten bzw. merken

α	x	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\tan(x)$
0°	0	0	1	0
0°< α <90°	$0 < x < \frac{\pi}{2}$	+	+	+
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	n.d.
90°< α <180°	$\frac{\pi}{2} < x < \pi$	+	-	-
180°	π	0	-1	0
180°< α <270°	$\pi < x < \frac{3\pi}{2}$	-	-	+
270°	$\frac{3\pi}{2}$	-1	0	n.d.
270°< α <360°	$\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$	-	+	-
360°	2π	0	1	0

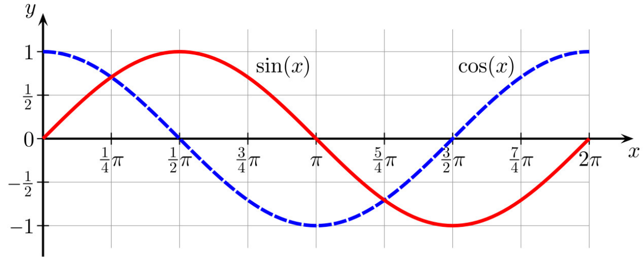
Beispiel

Folgende Zusammenhänge lassen sich herleiten:

- $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ (Pythagoras)
- $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ (Strahlensatz)
- $\sin(\alpha) = \cos(90° - \alpha)$
- $\sin(90° - \alpha) = \sin(90° + \alpha)$
- $\sin(-x) = -\sin(x)$
- $\cos(-x) = \cos(x)$

8.2.1 Sinus- & Kosinusfunktionen

Im Bogenmaß kann man die Funktionen $f(x) = \sin(x)$ und $g(x) = \cos(x)$ aufstellen.



Im Abstand von 2π wiederholen sich die Funktionswerte, man spricht von der Periode $T = 2\pi$.

x	$\sin(x)$	$\cos(x)$
0	Nullstelle	Hochpunkt
$\frac{\pi}{2}$	Hochpunkt	Nullstelle
π	Nullstelle	Tiefpunkt
$\frac{3\pi}{2}$	Tiefpunkt	Nullstelle
2π	Nullstelle	Hochpunkt

Ableitungen

$$\sin'(x) = \cos(x) \qquad \cos'(x) = -\sin(x)$$

8.2.2 Allgemeine Sinusfunktion

$$f(x) = a \cdot \sin(b \cdot (x + c)) + d$$

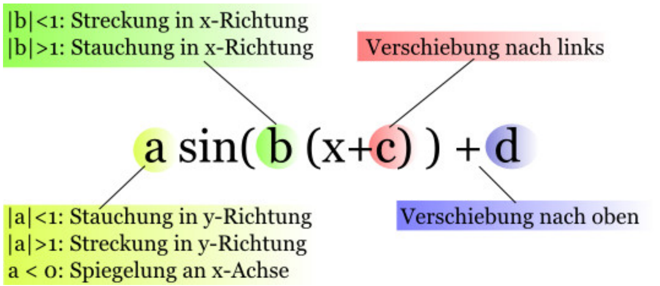
- Streckung um a in y-Richtung (Amplitude beträgt a)
- $T = \dfrac{2\pi}{b}$ ist die Periode, also eine Stauchung/Streckung in x-Richtung
- Verschiebung um c in x-Richtung ($c > 0$ nach links und $c < 0$ nach rechts)
- Verschiebung um d in y-Richtung (nach oben bzw. unten)

Analog dazu gelten die selben Regeln bei der Kosinusfunktion.

$$f(x) = 3\cos(2(x - \pi)) - 4$$

Gegenüber der Standard-Kosinusfunktion

- mit Faktor 3 in y-Richtung gestreckt
- $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$ als Periode, also enger zusammen
- um π nach rechts verschoben
- um 4 nach unten



8.2.3 Trigonometrische Gleichungen

Hat man einen GTR zur Verfügung, so sollte man die Gleichung grafisch lösen (Schnittstellen). Ist dies nicht der Fall, so hilft einem die Tabelle (Abschnitt: 8.2). Man bestimmt alle Lösungen innerhalb einer Periode und gibt dazu die Periodizität an.

Beispiel

$$\begin{aligned} \sin(x) &= 0,5 & k &\in \mathbb{Z} \\ x_1 &= \frac{\pi}{6} & x &= \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \\ x_2 &= \frac{5\pi}{6} & x &= \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi \end{aligned}$$

etwas schwieriger

Beispiel

$$\begin{aligned} \sin(2x+1) &= 0,5 & z &= 2x+1 \\ \sin(z) &= 0,5 & k &\in \mathbb{Z} \\ z_1 &= \frac{\pi}{6} & z &= \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \\ z_2 &= \frac{5\pi}{6} & z &= \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi \\ x &= \frac{1}{2}z - \frac{1}{2} & T &= \frac{2\pi}{2} = \pi \\ x_1 &= \frac{\pi}{12} + \frac{1}{2} & x &= \frac{\pi}{12} + \frac{1}{2} + k \cdot \pi \\ x_2 &= \frac{5\pi}{12} + \frac{1}{2} & x &= \frac{5\pi}{12} + \frac{1}{2} + k \cdot \pi \end{aligned}$$

trigonometrische Funktionen

Pirmin Gohn
Hans-Thoma-Gymnasium, Lörrach

„Mathematik ist die perfekte Methode, sich selbst an der Nase herum zu führen.“

Albert Einstein