7 Funktionen

7.1 Allgemein

Definition

Eine Funktion ist eine eindeutige Zuordnung, so dass jeder Zahl x aus einer Definitionsmenge genau eine Zahl y aus der Wertemenge zugeordnet ist (eine Funktion ist also eine Zuordnung).

Eine Funktion lässt sich auf verschiedene Weisen Darstellen. Gewöhnlich gibt man der Funktion einen Namen, meistens f, g oder h. Eine Zuordnung erfolgt dann per Funktionsgleichung:

$$f(x) = 2 \cdot x \qquad\qquad x \in \mathbb{R},$$

Jedem Wert x, aus der Definitionsmenge $\mathbb{R}$, wir somit der dazu doppelte Wert y zugeordnet, deshalb schreibt man manchmal auch etwas kürzer:

$$y = 2 \cdot x\,.$$

Man kann eine Funktion auch als (Werte-)Tabelle darstellen:

x	-2	-1	0	1	2
y	-4	-2	0	2	4

Am anschaulichsten ist jedoch ein (Funktions-)Graph als Schaubild der Funktion! Die waagrechte Achse („Abzisse“) zeigt dabei den x-Wert an , die senkrechte Achse („Ordinate“) gibt die Funktionswerte an. Man sagt oft einfach auch $x-$ bzw. y-Achse.

Definitionsbereich

Der Definitionsbereich einer Funktion f heißt D_f. Er enthält die Zahlen, die man für x in die Funktionsgleichung einsetzen darf.

Wertebereich

Der Wertebereich einer Funktion f heißt W_f. Er umfasst alle Funktionswerte, die diese Funktion annehmen kann.

In die Funktion $f(x) = 2x$ dürfen wir jede Zahl einsetzen, die wir wollen, die maximale Definitionsmenge ist also $D_f = \mathbb{R}$, ebenso kann die Funktion jeden beliebigen Wert annehmen und somit gilt auch $W_f = \mathbb{R}$.

Schauen wir uns aber einmal die Funktion $g(x) = \frac{1}{x^2}$ an, so bemerken wir, dass wir die Null nicht einsetzen dürfen und nur positive Werte von der Funktion angenommen werden, es folgt also: $D_g = \mathbb{R}^*$ und $W_g = \mathbb{R}^*_+$.

Noch kurz ein paar Hinweise zur Notation von Intervallen:

$$D_f = \{x|\,-1 \le x \le 2\} = [-1;2]$$

Diese beiden Schreibweisen bedeuten das Gleiche, man darf alle Zahlen zwischen Minus-Eins und Zwei einsetzen, einschließlich der Minus-Eins und Zwei. Will man eine davon (oder beide) ausschließen, so muss das entsprechende $\le$ durch eine $<$ ersetzen, bzw. eine runde Klammer statt der eckigen Klammer benutzen. Nehmen wir zum Beispiel an, dass die Zwei nun ausgeschlossen werden soll, so sieht das ganze so aus:

$$D_f = \{x|\,-1 \le x < 2\} = [-1;2)$$

Will man nun weiter nur ganze Zahlen benutzen, so kann man das wie folgt notieren:

$$D_f = \{x|\,-1 \le x < 2\,,\, x \in \mathbb{Z}\} = \{x|\,-1 \le x < 2\}_{\mathbb{Z}} = [-1;2)_{\mathbb{Z}}$$

Das würde bedeuten es sind nur -1, 0 und 1 als x-Werte erlaubt.

Nullstellen

Unter Nullstellen versteht man jene x-Werte, die eingesetzt in eine Funktion f den Funktionswert null liefern. Der Wortbestandteil „Stelle“ deutet dabei an, dass es sich um Elemente des Definitionsbereiches handelt. Bei reellen Funktionen sind das genau die Stellen der x-Achse, an denen der Graph einer Funktion f die x-Achse berührt oder schneidet.

Schnittpunkte

Schneiden sich die Graphen zweier Funktionen, so kann man die Stellen heraus finden, indem man die Funktionsgleichungen gleich setzt und nach x auflöst. Setzt man die x-Werte in eine der Gleichungen ein, so bekommt man auch die Funktionswerte der Schnittpunkte.

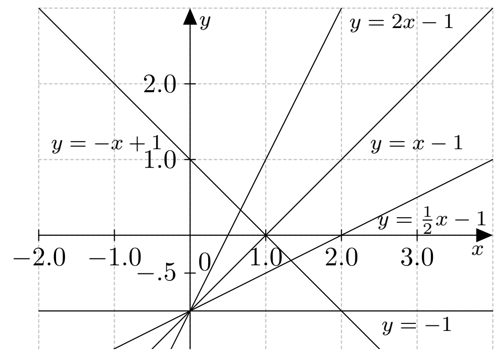
7.2 lineare Funktionen

Definition

Eine Funktion f mit der Gleichung $f(x) = m \cdot x + c$ heißt lineare Funktion, m heißt Steigung und c nennt man den y-Achsenabschnitt. Der Graph der Funktion wird als Gerade bezeichnet.

Man kann die Gerade direkt anhand der Funktionsgleichung konstruieren. So gibt der y-Achsenabschnitt c an, an welcher Stelle die Gerade die y-Achse schneidet. Die Steigung gibt an, wie viel Einheiten in y-Richtung man gehen muss, wenn man sich auf der Gerade um eine Einheit in x-Richtung nach rechts bewegt. Ist die Steigung positiv, so steigt die Gerade, ist sie hingegen negativ, so fällt die Gerade, gilt $m = 0$, so ist die Gerade parallel zur x-Achse. Hat man zwei Punkte einer Gerade so kann man m ganz einfach berechnen, man muss nur die Höhenunterschied $\Delta y = y_2 - y_1$ und den Horizontalunterschied $\Delta x = x_2 - x_1$ bestimmen.

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



Hat man die beiden Punkte P(2/1) und Q(0/-1) und soll daraus die lineare Funktion bestimmen, deren Schaubild durch diese beiden Punkte geht, so muss man zuerst die Steigung m ermitteln:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{(-1) - 1}{0 - 2} = \frac{-2}{-2} = 1$$

Wir haben also eine Steigung von eins! Somit wissen wir bisher: $f(x) = 1 \cdot x + b$, um nun b zu bestimmen, setzt man einen der beiden Punkte in die Gleichung ein (in diesem Fall P(2/1) - also x=2 und y=1):

$$1 = 1 \cdot 2 + b$$

Dies löst man nun nach b auf indem man auf beiden Seiten Zwei abzieht und so erhält man $b = -1$. Unsere Funktionsgleichung ist als $f(x) = x - 1$.

Zwei Geraden f und g stehen dann senkrecht aufeinander, wenn für ihre Steigungen gilt:

$$m_f \cdot m_g = -1$$

7.3 quadratische Funktionen

Definition

Eine Funktion der Form $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ nennt man eine quadratische Funktion oder eine Funktion zweiten Grades. Die Graphen werden Parabeln genannt, das Schaubild von $f(x) = x^2$ nennt man sogar Standardnormalparabel.

Betrachten wir zunächst eine Funktion $g(x) = f(x) + c$ anhand des Beispiels $g(x) = x^2 + 4$. Zu den $f(x)$-Werten der Standardnormalparabel wird also immer 4 hinzu addiert, die Parabel ist also um 4 Einheiten in y-Richtung nach oben verschoben worden (bei $-c$ nach unten).

Sagen wir wir wollen die Standardnormalparabel um 2 Einheiten nach rechts verschieben und nennen diese Funktion $h(x)$, d.h. wir wollen den tiefsten Punkt der Parabel, den „Scheitelpunkt statt bei (0/0 bei (2/0) haben. Somit muss also $h(2) = f(0)$ gelten. Stellt man diese Überlegung für weitere Punkte an, so bemerkt man, dass allgemein gilt: $h(x) = f(x-2)$ also $h(x) = (x-2)^2$.

Bleibt abschließend noch die Auswirkung von Vorfaktoren zu behandeln. Sei $g(x) = a \cdot f(x)$ so gilt:

- für $a > 1$ ist die Parabel steiler („gestreckt“)
- für $1 > a > 0$ ist die Parabel flacher („gestaucht“)
- für $a = -1$ Spiegelung an der x-Achse

Zusammenfassung

Eine Funktion $g(x) = a \cdot f(x-b) + c$ ist um c Einheiten nach oben verschoben (bei -c nach unten), um b Einheiten nach rechts (bei +b nach links) und den Faktor a gestreckt bzw. gestaucht in Bezug zur Funktion f(x).

Will man zum Beispiel die Standardnormalparabel um eine Einheit nach links und 2 Einheiten nach oben verschieben, so ergibt sich $k(x) = (x+1)^2 + 2$.

Dies gilt nicht nur bei quadratischen Funktionen Sei $f(x) = x^3 + x^2 + 2$ so ist $g(x) = x^3 + x^2 + 6$ um 4 nach oben und $h(x) = (x-2)^3 + (x-2)^2 + 2$ um zwei nach rechts verschoben gegenüber der Funktion f.

7.3.1 Scheitelform

Der markanteste Punkt eine Parabel ist der sogenannte Scheitelpunkt, bei der Standardnormalparabel ist er $S(0/0)$. Wie kann man diesen Punkt jedoch bei anderen Parabeln bestimmen?

Eine Parabel ist stets symmetrisch zu einer Achse parallel zur y-Achse durch den Scheitelpunkt. So lässt sich also der Scheitel immer ermitteln. Auch durch Verschieben lässt sich der Scheitel ermitteln. Das Schaubild einer Funktion $f(x) = a \cdot (x-b)^2 + c$ ist ja bekanntlich um b nach rechts und c nach oben Verschoben, somit wäre der Scheitel $S(b/c)$. Umgekehrt lässt sich also auch mit Hilfe des Scheitels die Funktionsgleichung ermitteln.

Sei der Scheitel $S(1/1)$, so ergibt sich: $f(x) = (x-1)^2 + 1 = x^2 - 2x + 2$ (Scheitelform wurde ausmultipliziert). Es muss also ein Weg gefunden werden das Ausmultiplizieren rückgängig zu machen.

Diesen Weg nennt man *quadratische Ergänzung*. Wir müssen also ein Binom suchen. Hierfür nehmen wir den linearen Term, also genauer den Vorfaktor vor dem x - also hier -2 und halbieren ihn, berechnen das Binom und formen um.

quadratische Ergänzung

Sei $f(x) = x^2 + px + q$ so berechnen wir zuerst:

$$\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 = x^2 - px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 \qquad \left| - \left(\frac{p}{2}\right)^2\right.$$
$$\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 = x^2 - px$$

Dies setzen wir nun in die Funktion ein und erhalten:

$$f(x) = x^2 - px + q = \left(x^2 - \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q$$

Nun können wir den Scheitelpunkt ablesen: $S\left(-\frac{p}{2} / -\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q\right)$

$$f(x) = x^2 - 2x + 2$$

Somit lesen wir p=-2 ab, so folgt diese Nebenrechnung:

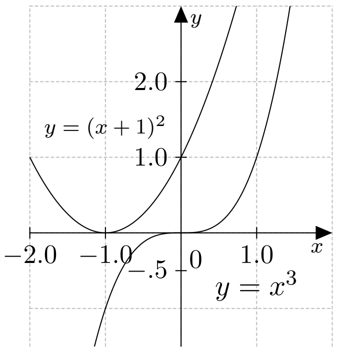
$$(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1 \qquad | - 1$$
$$(x-1)^2 - 1 = x^2 - 2x$$

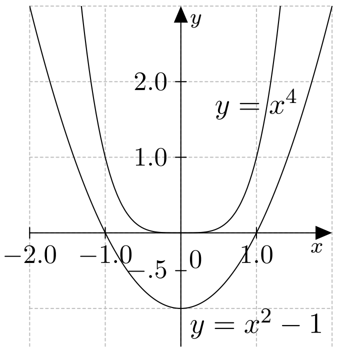
Setzen dies nun ein:

$$f(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 - 1 + 2 = (x-1)^2 + 1$$

Nun können wir S(1/1) ablesen.

7.4 weitere Funktionen





Funktionen

Pirmin Gohn
Hans-Thoma-Gymnasium, Lörrach

„Verehrter Herr Kollege, es wird einfach nichts Gescheites daraus, wenn man die Galle die Funktion des Gehirns ausüben läßt!“
Heinz Kühn