6 Potenz & Logarithmus

6.1 Potenzen & Wurzeln

$4^n = \underbrace{4 \cdot 4 \cdots 4}_{n-fach}$ ist die n-te Potenz von 4, n wird als Exponent bezeichnet und 4 als Basis. Stellt man sich die Frage welche Zahl $x^3 = 27$ erfüllt so sucht man die dritte Wurzel von 21; $\sqrt[3]{21}$. Die 21 nennt man dabei den Radikanten.

Potenzen und Wurzeln benutzen exakt die selben Rechenregeln!

Rechenregeln

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{a} &= a^{\frac{1}{n}} & a^{-n} &= \frac{1}{a^n} \\ a^0 &= 1 & a^1 &= a \\ a^m \cdot a^n &= a^{m+n} & \frac{a^m}{a^n} &= a^{m-n} \\ a^n b^n &= (ab)^n & \frac{a^n}{b^n} &= \left(\frac{a}{b}\right)^n \\ (a^m)^n &= a^{mn} \end{aligned}$$

Beispiel

$$\begin{aligned} \sqrt{3} &= 3^{\frac{1}{2}} \\ \frac{1}{4} &= 4^{-1} = \frac{1}{2^2} = 2^{-2} \\ 27^{2/3} &= \left(\sqrt[3]{27}\right)^2 = 3^2 = 9 \\ \frac{2^2}{2^2} &= 2^{2-2} = 2^0 = 1 \\ 2^3 \cdot 3^3 &= (2 \cdot 3)^3 = 6^3 = 216 \\ \left(2^3\right)^2 &= 2^{3 \cdot 2} = 2^6 = 64 \end{aligned}$$

6.2 Spezielles bei Wurzeln

Die Rechenregeln sind identisch zu denen bei Potenzen, werden aber zum besseren Verständnis nochmals notiert!

Rechenregeln

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} &= \sqrt[n]{a \cdot b} \\ \sqrt[n]{a^b} &= \sqrt[n]{a}^b \\ \sqrt[n]{\sqrt[m]{b}} &= \sqrt[n \cdot m]{b} \end{aligned}$$

Beispiel

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{5} &= \sqrt[3]{4 \cdot 5} = \sqrt[3]{20} \\ \sqrt{3^5} &= \sqrt{3}^5 \\ \sqrt{\sqrt[3]{10}} &= \sqrt[2+3]{10} = \sqrt[5]{10} \end{aligned}$$

Nenner rational machen

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \tag{1}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}+1} = \frac{1}{\sqrt{3}+1} \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1} \overset{a}{=} \frac{\sqrt{3}-1}{2} \tag{2}$$

[a] 3. binomische Formel

6.3 Logarithmen

Der Logarithmus c von b zur Basis a ($c = \log_a b$) ist die Antwort auf die Frage, für welches unbekannte c gilt $b = a^c$:

$$b = a^c \iff c = \log_a b$$

Wir suchen das x, für welches gilt $2^x = 8$. Wie oft muss man also die 2 mit sich selbst multiplizieren, damit es 8 ergibt? In diesem Fall kann man das sehr leicht im Kopf ausrechnen, denn $2^3 = 8$. Also ist $x = \log_2 8 = 3$.

Nicht jeder Logarithmus ist so einfach zu berechnen, oft benötigt man dazu einen Taschenrechner oder ein paar Rechenregeln, die einem helfen. Früher benutzte man Logarithmentafeln, auf denen viele Logarithmen notiert waren, damit man sich nicht immer wieder berechnen musste.

Logarithmengesetze

$$\begin{aligned} \log_a(u \cdot v) &= \log_a u + \log_a v \\ \log_a u^r &= r \cdot \log_a u \\ \log_c b &= \frac{\log_a b}{\log_a c} && \text{„Basiswechsel“} \\ \log_a \left(\frac{u}{v}\right) &= \log_a u - \log_a v \\ \log_a \sqrt[n]{u} &= \frac{1}{n} \log_a u \end{aligned}$$

Die unteren beiden „Gesetze“ lassen sich auch aus den Oberen herleiten.

Beispiel

$$\begin{aligned}\log_2(8\cdot\sqrt{2}) &= log_2 8 + \log_2\sqrt{2}\\ &= 3 + \frac{1}{2}\log_2 2\\ &= 3 + \frac{1}{2}\\ &= 3,5\end{aligned}$$

Basiswechsel sind vor allem dann notwendig, wenn man mit dem Taschenrechner arbeitet, da dieser meistens nur wenige Logarithmen kennt. Meistens sind dies der $\lg = \log = \log_{10}$ oder $\ln = \log_e$.

$$\log_2 3 = \frac{\ln 3}{\ln 2} = \frac{\lg 3}{\lg 2} \approx 1,58$$

also gilt: $2^{1,58} \approx 3$

6.4 typische Fehler

Achtung

$$a^n + b^n \neq (a+b)^n$$
$$\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{a+b}$$

Beispiel

$$3^2 + 4^2 \neq (3+4)^2 = 7^2$$
$$\sqrt{16} + \sqrt{9} \neq \sqrt{25}$$

6.5 Muss man wissen!

$0^0 = 1$	$5^0 = 1$
$0^2 = 0$	$25^2 = 625$
$1^2 = 1$	$11^2 = 121$
$2^2 = 4$	$12^2 = 144$
$3^2 = 9$	$13^2 = 169$
$4^2 = 16$	$14^2 = 196$
$5^2 = 25$	$15^2 = 225$
$6^2 = 36$	$16^2 = 256$
$7^2 = 49$	$17^2 = 289$
$8^2 = 64$	$18^2 = 324$
$9^2 = 81$	$19^2 = 361$
$10^2 = 100$	$20^2 = 400$
$2^3 = 8$	$3^3 = 27$
$4^3 = 64$	$5^3 = 125$
$2^4 = 16$	$2^5 = 32$
$2^6 = 64$	$2^7 = 128$
$2^8 = 256$	$2^9 = 512$
$2^{10} = 1024$	
$(-1)^2 = 1$	$-1^2 = -1$
$(-1)^3 = -1$	$-1^3 = -1$
$(-1)^4 = 1$	$-1^4 = -1$
$\sqrt{-1} = n.d.$	$\sqrt[3]{-1} = -1$
$\sqrt{0} = 0$	$\sqrt[3]{0} = 0$

Potenzen & Logarithmen

Pirmin Gohn
Hans-Thoma-Gymnasium, Lörrach

„"*Durch die Arbeitserleichterung infolge der Verwendung von Logarithmen wird das Leben der Astronomen verdoppelt.*' Pierre-Simon Laplace