4 Gleichungen

Möchte man eine Gleichung lösen, so ist es notwendig sie um zu formen. Man notiert rechts neben der Gleichung einen senkrechten Strich und danach die Rechenoperation, welche man auf beiden Seiten der Gleichung durchführen will. In der Zeile darunter notiert man die neue (äquivalente) Gleichung. Die Gleichheitszeichen sollten dabei untereinander stehen. Am Ende gibt man die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ an und führt zuvor eine Probe durch.

Brüche beseitigen

Da beim Rechnen mit Brüchen die meisten Fehler passieren sollte man als ersten Schritt immer mit dem Hauptnenner multiplizieren. Als Alternative kann man auch nacheinander mit jedem vorhandenen Nenner durchmultiplizieren.

4.1 Terme zusammenfassen

Man sollte immer zuerst Terme zusammenfassen, so weit es geht. Das Zusammenfassen lässt sich immer auf ein „Ausklammern“ zurückführen, auch wenn man das nicht immer notiert.

Beispiel

$$5a + 3a = (5+3)a = 8a$$
$$5a - 3a = (5-3)a = 2a$$

Man darf immer nur gleichartige Terme zusammenfassen. Gleichartige Terme unterscheiden sich nur durch den Koeffizienten (Zahlfaktor). $4x$ und $-5x$, sowie $3ab$ und ab sind gleichartig, jedoch $4y$ und $3y^2$ sind nicht gleichartig.

Beispiel

$$ab + 3ab = 8ab$$
$$4y + 3y^2 \neq 7y^3$$
$$3a + 4b \neq 7ab$$

Klammern auflösen

Soll man nach einer Variablen auflösen, die in einer Klammer vorkommt, so muss man zuerst die Klammer auflösen. Achtung - Vorzeichen nicht vergessen! Löst man eine Gleichung, so sollten die Gleichheitszeichen immer untereinander stehen und rechts mit nach einem senkrechten Strich notiert werden, was man durchführt. Die ersten beiden Kommentare lässt man meistens weg, die Rechenoperationen, welche man auf beiden Seiten anwenden muss, darf man jedoch nicht weg lassen. In dem Beispiel wird nach a aufgelöst.

Beispiel

$$\begin{aligned} 3(a-2) - 2(4-a) &= -4 \qquad &&|\text{Klammern auflösen} \\ 3a - 6 - 8 + 2a &= -4 &&|\text{Zusammenfassen} \end{aligned}$$

4.2 Bestimmung des Gleichungstyps

Jeder Gleichungstyp hat seinen speziellen Lösungsalgorithmus, man muss also zuerst erkennen welcher Gleichungstyp vorliegt um ihn dann richtig lösen zu können. Am häugisten sind: Lineare, quadratische, Wurzel-, Potenz-, Exponential- und trigonometrische Gleichungen.

4.3 Lineare Gleichungen

Es kommen nur Summanden die nicht von Variablen abhängen oder Vielfache davon sind (z.B. $23x - 3 = \frac{1}{2}x + 3$).

Nachdem alle Brüche beseitigt worden sind (mit Nenner mutliplizieren) bringt man alle Summanden mit einer Variable auf die eine Seite und die alle Summanden ohne auf die andere Seite (+ oder -). Nachdem man dann zusammengefasst hat (notfalls ausklammern), teilt man durch den Koeffizienten vor der Variable.

1. Brüche beseitigen (mit Nennern multiplizieren)
2. Variable isolieren durch + bzw -
3. Zusammenfassen
4. Durch den Koeffizienten vor der Variable teilen

Beispiel

$$\begin{aligned} 3(a-2) - 2(4-a) &= -4 \qquad &&|\text{Klammern auflösen} \\ 3a - 6 - 8 + 2a &= -4 &&|\text{Zusammenfassen} \\ 5a - 14 &= -4 &&|+4 \\ 5a &= 10 &&|:5 \\ a &= 2 &&\mathbb{L} = \{2\} \end{aligned}$$

4.4 Quadratische Gleichungen

Kommen in einer Gleichung die Variable maximal als Quadrat und nicht als noch höhere Potenz vor, so spricht man von einer quadratischen Gleichung.

Reinquadratische Gleichungen

Eine Gleichung der Form $x^2 = a$ heißt reinquadratische Gleichung und lässt sich durch „Wurzelziehen“ direkt lösen. Es gibt in solch einem Fall jedoch bis zu zwei Lösungen, da auch $-\sqrt{a}$ eine Lösung ist.

Beispiel

$$\begin{aligned} x^2 + 4 &= 5 \qquad &&|-4 \\ x^2 &= -1 &&|\sqrt{\cdots} \\ x_1 &= -1 &&x_2 = 1 \\ \mathbb{L} &= \{-1; 1\} \end{aligned}$$

Allgemeine quadratische Gleichungen

In einer allgemeinen quadratischen Gleichung treten Summanden auf, die Vielfach von x oder x^2 bzw. gar nicht von der Variable abhängen (z.B. $x^2 + 4x = 4$).

1. Brüche beseitigen (mit Nennern multiplizieren)
2. Eine Seite auf 0 bringen (+ oder -)
3. Zusammenfassen
4. Durch den Koeffizienten von x^2 teilen
5. Mitternachtsformel anwenden

Mitternachtsformel

pq-Formel

Eine Gleichung der Form $x^2 + px + q = 0$ hat folgende Lösungen:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Beispiel

$$\begin{aligned} (x-3)(x+2) - 3 &= -3 \qquad &&|\text{Klammern auflösen} \\ x^2 - x - 9 &= -3 &&|+3 \\ x^2 - x - 6 &= 0 &&|pq-Formel \\ p = -1 \qquad q &= -6 \end{aligned}$$

Fortsetzung siehe nächste Seite

Beispiel

$$\begin{aligned} x_{1;2} &= -\frac{-1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-1}{2}\right) - (-6)} \\ &= \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}} \\ &= \frac{1}{2} \pm \frac{5}{2} \end{aligned}$$

$x_1 = -2 \qquad\qquad x_2 = 3$

$\mathbb{L} = \{-2; 3\}$

abc-Formel

Oft wird auch diese Formel als „Mitternachtsformel“ bezeichnet, bei ihr wäre der 4. Schritt dann unnötig Eine Gleichung der Form $ax^2 + bx + c = 0$ hat folgende Lösungen:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Beispiel

$$\begin{aligned} x^2 - x - 12 &= -x^2 + 3x && |+x^2 \\ 2x^2 - x + 12 &= +3x && |-3x \\ 2x^2 - 2x - 12 &= 0 && |abc - Formel \\ a = 2 \quad b &= -2 && c = 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_{1;2} &= -\frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 12}}{2 \cdot a} \\ &= \frac{2 \pm \sqrt{4 + 96}}{4} \\ &= \frac{2 \pm 10}{4} \end{aligned}$$

$x_1 = -2 \qquad\qquad x_2 = 3$

$\mathbb{L} = \{-2; 3\}$

4.5 Satz vom Nullprodukt

Ist ein Faktor in einem Produkt 0, so ist das ganze Produkt 0.

Beispiel

$$\begin{aligned} (x-1)(x+2) &= 0 && |\text{S.d.Np.} \\ x - 1 &= 0 && x + 2 = 0 \\ x_1 &= 1 && x_2 = -2 \\ \mathbb{L} &= \{-2; 1\} \end{aligned}$$

4.6 Linearfaktorzerlegung

Hinter dem Begriff der „Linearfaktorzerlegung“ verbirgt sich folgende Idee: So wie man bei der Primfaktorzerlegung eine Zahl in ein Produkt von Primzahlen umschreibt, kann man (fast) jedes Polynom (etwa $2x^3 + 4x - 5$) als ein Produkt von Linearfaktoren schreiben.

Linearfaktoren sind Terme von der Form $(m \cdot x + c)$. Um ein Polynom mit höchster Potenz n (man sagt auch „vom Grad n“) in Linearfaktoren zerlegen zu können machst du Folgendes:

- Bestimme den Vorfaktor der Summanden mit der höchsten Potenz a
- Bestimme die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{x_1, \cdots, x_n$, wenn du das Polynom Null setzt
- Stimmt der Grad n des Polynoms mit der Anzahl der „Nullstellen“ überein, so schreibt man: $a \cdot (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)$

So erhält man z.B. die Gleichheiten (Bsp. pq- & abc-Formel)

Beispiel

$$\begin{aligned} x^2 - x - 6 &= (x+2)(x-3) \\ 2x^2 - 2x - 12 &= 2(x+2)(x-3) \end{aligned}$$

4.7 Wichtige Hinweise

! Nenner werden niemals ausmultipliziert

! Man dividiert niemals durch die gesuchte Variable

! Immer jeden Summanden dividiere bzw. multiplizieren

Es gibt bei der Lösungsmenge auch Sonderfälle, so kann es keine oder unendlich viele Lösungen geben. Kommt es zu einem Widerspruch oder wird die Wurzel aus einer negativen Zahl gesucht so sagt man die Lösungsmenge ist leer und man schreibt $\mathbb{L} = \{\}$. Ergibt sich jedoch eine allgemein richtige Aussage im Sinne von 1=1, so dass im speziellen die Variable eliminiert werden kann, so sind alle möglichen Zahlen richtig, je nachdem welche Zahlen zugelassen sind gilt dann meistens $\mathbb{L} = \mathbb{R}$.

Gleichungen

Pirmin Gohn
Hans-Thoma-Gymnasium, Lörrach

„Gleichungen sind wichtiger für mich, weil die Politik für die Gegenwart ist, aber eine Gleichung etwas für die Ewigkeit.“ Albert Einstein