1 Bruchrechnen

1.1 Brüche

Ein Bruch besteht aus einem Zähler, einem Nenner und einem Bruchstrich.

$$\frac{\text{Zähler}}{\text{Nenner}}$$

Ein Bruch symbolisiert Bruchteile, so steht etwa eine $\frac{3}{4}$ (sprich: „drei Viertel“) zum Beispiel für 3 Teile von 4. Schaut man sich nun einmal $\frac{9}{12}$ eines Kreises an und vergleicht es mit $\frac{3}{4}$ eines Kreises, so erkennen wir, dass es die selben Anteile sind.

1.2 Kürzen & erweitern

Der Wert eines Bruches bleibt unverändert, wenn man Zähler und Nenner durch dieselbe Zahl dividiert. Dieser Vorgang heißt kürzen, Brüche werden immer vollständig gekürzt angegeben. Manchmal ist es notwendig das Kürzen rückgängig zu machen in dem man Zähler und Nenner mit der selben Zahl multipliziert, dies nennt man „erweitern“.

Beispiel

$$\frac{9}{12} = \frac{3\cdot 3}{3\cdot 4} = \frac{3}{4}$$
$$\frac{4}{8} = \frac{4\cdot 1}{4\cdot 2} = \frac{1}{2}$$
$$\frac{24}{36} = \frac{2\cdot 12}{2\cdot 18} = \frac{12}{18} = \frac{2\cdot 6}{2\cdot 9} = \frac{6}{9} = \frac{3\cdot 2}{3\cdot 3} = \frac{2}{3}$$
$$\frac{ab}{ac} = \frac{a\cdot b}{a\cdot c} = \frac{b}{c}$$

1.3 Rechnen mit Brüchen

Multiplizieren

Brüche werden miteinander multipliziert indem man jeweils die Zähler und die Nenner miteinander multipliziert.

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d} = \frac{a\cdot c}{b\cdot d} = \frac{ac}{bd}$$

Beispiel

$$\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{7} = \frac{3\cdot 5}{4\cdot 7} = \frac{15}{28}$$
$$\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{9} = \frac{3\cdot 4}{4\cdot 9}\left(=\frac{12}{36}\right) = \frac{1}{3}$$
$$\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{3} = \frac{3\cdot 4}{4\cdot 3} = 1$$

Dividieren

Durch einen Bruch wird dividiert indem man mit dem Kehrbruch multipliziert. Den Kehrbruch eines Bruches erhält man indem man den Zähler mit dem Nenner vertauscht:

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c} = \frac{ad}{cb}$$

Beispiel

$$\frac{3}{4}:\frac{5}{7} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{7}} = \frac{3}{4}\cdot\frac{7}{5} = \frac{21}{20}$$
$$\frac{3}{4}:\frac{9}{4} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{9}{4}} = \frac{3}{4}\cdot\frac{4}{9} = \frac{1}{3}$$
$$\frac{3}{4}:3 = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{3}{1}} = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{4}$$

Addieren & Subtrahieren

Brüche werden addiert/subtrahiert indem man sie gleichnamig macht, dass heißt auf den gleichen (Haupt-)Nenner erweitert und dann die Zähler addiert/subtrahiert und dabei den gemeinsamen (Haupt-)Nenner beibehält:

$$\frac{a}{b}\pm\frac{c}{d} = \frac{ad}{bd}\pm\frac{bc}{bd} = \frac{ad\pm bc}{bd}$$

Beispiel

$$\frac{3}{4}+\frac{5}{7} = \frac{3\cdot 7}{4\cdot 7}+\frac{5\cdot 4}{7\cdot 4} = \frac{21+20}{28} = \frac{41}{28}$$
$$\frac{3}{4}-\frac{5}{7} = \frac{3\cdot 7}{4\cdot 7}-\frac{5\cdot 4}{7\cdot 4} = \frac{21-20}{28} = \frac{1}{28}$$
$$\frac{1}{2}-\frac{1}{8} = \frac{1\cdot 4}{2\cdot 4}-\frac{1\cdot 1}{8\cdot 1} = \frac{4-1}{8} = \frac{3}{8}$$

Addiert oder subtrahiert man eine ganze Zahl, so muss diese zuerst ebenfalls auf den Hauptnenner gebracht werden.

Beispiel

$$\frac{3}{4}-1 = \frac{3}{4}-\frac{4}{4} = \frac{3-4}{4} = -\frac{1}{4}$$
$$\frac{3}{4}+2 = \frac{3}{4}+\frac{8}{4} = \frac{3+8}{4} = \frac{11}{4}$$

1.4 gemischte Schreibweise

Die gemischte Schreibweise ist die einzige Ausnahme bei welcher in der Schulmathematik ein nicht geschriebenes Rechenzeichen ein + ist und kein Malpunkt. Es ist ratsam diese Notation daher so Selten wie möglich zu verwenden. Leider benutzen einige Mathebücher diese Schreibweise:

Beispiel

$$1\frac{3}{4} == 1+\frac{3}{4} = \frac{4}{4}+\frac{3}{4} = \frac{3+4}{4} = \frac{7}{4}$$
$$2\frac{2}{3} = 2+\frac{2}{3} = \frac{6}{3}+\frac{2}{3} = \frac{6+2}{3} = \frac{8}{3}$$

1.5 Brüche & Dezimalzahlen

Brüche die im Nenner eine 10, 100, 1000 $\cdots$ stehen haben heißen Zehnerbrüche. Zahlen mit Stellen hinter dem Komma heißen Dezimalzahlen. Wie rechnet man Brüche in Dezimalzahl um? Besonders einfach geht das bei Zehnerbrüchen. Jedoch kann nicht jeder Bruch zu einem Zehnerbruch erweitert werden, dies ist jedoch nur möglich, wenn die Primfaktorzerlegung des Nenners nur Zweien und Fünfen enthält. Man geht dann folgendermaßen vor:

Bruch → Dezimalzahl

- Erweitern des Bruches zu einem Zehnerbruch
- Zählen, wie viele Nullen der Nenner hat, genau so viele Nachkommastellen hat die Dezimalzahl
- Zähler rechtsbündig als Dezimalzahl notieren

Beispiel

$$\frac{9}{10} = 0,9 \qquad \frac{1}{2} = \frac{5}{10} = 0,5$$
$$\frac{5}{100} = 0,05 \qquad \frac{1}{4} = \frac{25}{100} = 0,25$$

Ist der Bruch nicht auf ein Zehnerbruch erweiterbar, so liegt eine periodische Dezimalzahl vor. Man teilt den Zähler durch den Nenner. Allerdings braucht man von diesem Divisionsergebnis nur so viele Nachkommastellen zu betrachten bis sie sich wiederholen.

Beispiel

$$\frac{1}{3} = 0,\overline{3}$$
$$\frac{1}{7} = 0,\overline{142857}$$

Dezimalzahl → Bruch

Man zählt die Nachkommastellen der Dezimalzahl. Anschließend nimmt man sich die Zehnerpotenz, die so viele Nullen hat wie die Dezimalzahl Nachkommastellen. Diese schreibt man in den Nenner und die Dezimalzahl ohne Komma in den Zähler.

Beispiel

$$0,9 = \frac{9}{10}$$
$$0,5 = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$
$$0,05 = \frac{5}{100} = \frac{1}{20}$$
$$0,25 = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$$

Vorteile von Bruchrechnen

häufig sind sie übersichtlicher
keine Näherung notwendig, daher exakter
beim Rechnen mit Termen unumgänglich z.B.

typische Fehler

$\frac{1+4}{2} \neq \frac{1+2}{2}$ nicht in Summen kürzen

$\frac{1}{2}+\frac{1}{3} \neq \frac{1}{5}$ Hauptnenner!

$\frac{1}{2}+4 \neq \frac{1+4}{2}$ Hauptnenner!

$\frac{2}{3}:4 \neq \frac{2:4}{3}$ Kehrwert von 4 ist $\frac{1}{4}$

$\frac{2}{0} \neq 0$ NIEMALS durch Null teilen

HTG lyrelda.de 3Gn14

Bruchrechnen

Pirmin Gohn
Hans-Thoma-Gymnasium, Lörrach

„Ein Mensch ist wie eine Bruchrechnung: Sein Zähler zeigt an, was er ist, und sein Nenner, wofür er sich hält. Je größer der Nenner, desto kleiner der Bruch.“ Lew Nikolajewitsch Graf Tolstoi