1 Hypothesen-Tests bei Binomialverteilungen

*„Ein statistisches Testverfahren lässt sich im Prinzip mit einem Gerichtsverfahren vergleichen. Das Verfahren hat (meistens) als Zweck festzustellen, ob es ausreichend Beweise gibt, den Angeklagten zu verurteilen. Es wird dabei immer von der Unschuld eines Verdächtigen ausgegangen, und so lange große Zweifel an den Belegen für ein tatsächliches Vergehen bestehen, wird ein Angeklagter freigesprochen. Nur wenn die Indizien für die Schuld eines Angeklagten deutlich überwiegen, kommt es zu einer Verurteilung. Es gibt demnach zu Beginn des Verfahrens die beiden Hypothesen H_0 „der Verdächtige ist unschuldig“ und H_1 „der Verdächtige ist schuldig“. Erstere nennt man Nullhypothese, von ihr wird vorläufig ausgegangen. Die zweite nennt man Alternativhypothese. Sie ist diejenige, die zu „beweisen“ versucht wird. Um einen Unschuldigen nicht zu leicht zu verurteilen, wird die Hypothese der Unschuld erst dann verworfen, wenn ein Irrtum sehr unwahrscheinlich ist. Man spricht auch davon, die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler erster Art (also das Verurteilen eines Unschuldigen) zu kontrollieren. Aufgrund der stochastischen Struktur des Testproblems lassen sich wie in einem Gerichtsverfahren Fehlentscheidungen grundsätzlich nicht vermeiden.“*http://de.wikipedia.org/wiki/Statistischer_Test

1.1 Einseitige Tests

Wer Entscheidungen zu treffen hat, weiß oft erst im Nachhinein ob seine Entscheidung richtig war. Die Unsicherheit eine Entscheidung zu treffen, beinhaltet immer eine gewisse Fehlerwahrscheinlichkeit. Der Hypothesentest gibt uns eine Richtlinie für die Wahl einer Alternativentscheidung. Wir treffen unsere Entscheidung auf der Grundlage dessen, was wir für richtig erachten. Das nennen wir die Nullhypothese H_0. Eine Alternativentscheidung nennen wir Alternativhypothese H_1.

Ablaufplan

- Formulierung der Nullhypothese H_0 und der Alternativhypothese H_1
- Festlegung des Signifikanzniveaus α (manchmal vorgegeben)
- Bestimmung des Annahme- und Ablehnungsbereichs der Nullhypothese
- gegebenenfalls Ziehung der Stichprobe
- Treffen der Testentscheidung - liegt das Ergebnis der Stichprobe innerhalb des Annahmebereichs, wird H_0 angenommen, anderenfalls abgelehnt

Tipps zum Aufstellen der Hypothesen

- Was ich zeigen oder beweisen will, gehört in die Alternativhypothese
- Das Gleichheitszeichen gehört immer in die Nullhypothese
- Die Annahme der Nullhypothese führt immer zur Ablehnung der Alternativhypothese, ist aber kein Beweis dafür, dass die Nullhypothese stimmt. Die Ablehnung der Nullhypothese führt zur Annahme der Alternativhypothese.

pirmingohn@gmail.com

Sollte man wissen

- $H_1 : \quad p > p_0$ hat einen rechtsseitigen Test zur Folge. Mittels Liste der kumulierten Wahrscheinlichkeiten Annahmebereich $A = [0;\ b]$ und Ablehnungsbereich $\overline{A} = [0;\ b+1]$ bestimmen, wobei $b+1$ maximal gewählt ist, so dass gerade noch $\sum\limits_{i=b+1}^{n} P(X=i) < \alpha$
- $H_1 : \ p < p_0$ hat einen linksseitigen Test zur Folge. Mittels Liste der kumulierten Wahrscheinlichkeiten Annahmebereich $A = [a;\ n]$ und Ablehnungsbereich $\overline{A} = [0;\ a-1]$ bestimmen, wobei $a-1$ maximal gewählt ist, so dass gerade noch $\sum\limits_{i=0}^{a-1} P(X=i) < \alpha$

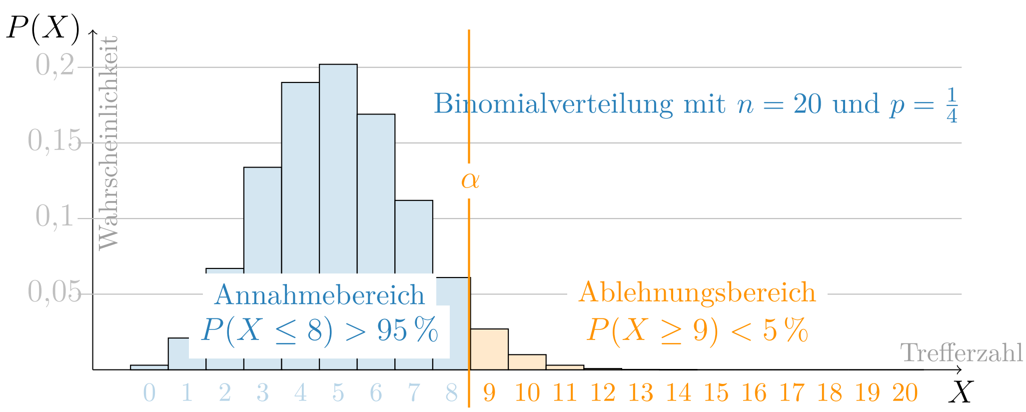
Beispiel

Eine Befragung aller Schüler im letzten Jahr, ergab dass 25 % von ihnen nicht mit dem Essen der Mensa zufrieden waren. Es wird vermutet, dass die Unzufriedenheit inzwischen zugenommen hat. Um dies zu beurteilen, werden 20 Schüler befragt.
Die Nullhypothese lautet somit $H_0 : \ p = 0,25$ und die Alternativhypothese $H_1 : \ p > 0,25$
6 Schüler waren mit dem Essen unzufrieden, das ist zwar mehr als der Erwartungswert $E(X) = 20 \cdot \frac{1}{4} = 5$, jedoch ist die Abweichung noch recht gering, dies sieht man an der Wahrscheinlichkeit $P(X \geq 6) \approx 0,383$.
Um einen Ablehnungsbereich festlegen zu können braucht man als ein Signifikanzniveau, will man eine Sicherheit von mindestens 95 %, also nur in 5 % der Fällen zu unrecht das Niveau des Essens kritisieren, so wählt man das Signifikanzniveau 0, 05 und bestimmt k so, dass gilt $P(X \geq k) \leq 0,05$

Maple: seq([i,evalf(sum(Pb(k),k=i..n))],i=0..n);
$\rightarrow P(X \geq 8) \approx 10,2\%$ und $P(X \geq 9) \approx 4,1\%$

$$\begin{aligned} \textit{Annahmebereich}: &\quad A = \{0; 1; ..; 8\} \\ \textit{Ablehnungsbereich}: &\quad \overline{A} = \{9; 10; ..; 20\} \end{aligned}$$

Bei 9 oder mehr negativen Äußerungen über das Essen, kann man mit 95 %-iger Sicherheit davon ausgehen, dass die Qualität schlechter empfunden wird, als vor einem Jahr.



Man spricht von einem **rechtsseitigen** Test, da der Ablehnungsbereich auf der rechten Seite der Verteilung liegt.

Beispiel

Ein Losverkäufer verkauft 100 Lose und behauptet es seien 40 Gewinne darunter. Also $H_0: \; p = 0,4$ und $H_1: \; p \leq 0,4$. Gehen wir von einer Stichprobe von 20 Losen aus (mit Zurücklegen), somit ist die Zufallsvariable X (Anzahl der Gewinne) $B_{20;0,4}$-verteilt ($E(X) = \mu = 8$). Sei das Signifikanzniveau $\alpha = 0,05$, so gilt, da „links" der Ablehnungsbereich ist (**linksseitiger Test**):

MAPLE: seq([i,evalf(sum(Pb(k),k=0..i))],i=0..n);
$\rightarrow P(X \leq 3) \approx 1,6\%$ und $P(X \leq 4) \approx 5,1\%$

Ablehnungsbereich $\overline{A} = \{0;\, 1\,;\, 2; 3\}$ Annahmebereich $A = \{4; ..; 20\}$

Bei einer Stichprobe wurden nur 3 Gewinne gezogen, die Nullhypothese muss also abgelehnt werden. Allerdings können wir uns mit der Ablehnung der Null-Hypothese auch irren, da die Werte 0 bis 3 für X bei korrekter Null-Hypothese mit einer Wahrscheinlichkeit von 1,6 % eintreten. Das ist die sogenannte Irrtumswahrscheinlichkeit (oder **Fehler 1. Art**). (Bei einem vorsichtigeren Signifikanzniveau von z.B. 1 %, so würde die Nullhypothese NICHT abgelehnt werden.

Fehler

Fehler 1. Art liegt vor, wenn bei einem Hypothesentest die Nullhypothese zu Unrecht verworfen wird

Fehler 2. Art liegt vor, wenn bei einem Hypothesentest die Nullhypothese zu Unrecht beibehalten wird

Beispiel

Eine Maschine fertigt Werkstücke und produziert dabei 2% Ausschuss (Nullhypothese). Ein Arbeiter hat das Gefühl, dass die Maschine schlechter arbeitet und mehr defekte Teile produziert. Er notiert sich die Anzahl defekter Stücke unter den nächsten Hundert. Bei fünf oder mehr nimmt er an richtig zu liegen.
Der Fehler 1. Art wäre, wenn die Maschine nach wie vor 2% Ausschuss produziert, unter den Hundert Teilen aber fünf oder mehr defekte sind. Der Fehler 2. Art tritt auf, wenn die Maschine schlechter arbeitet, aber trotzdem maximal vier defekte Werkstücke unter den Hundert sind.

pirmingohn@gmail.com