Summenzeichen

Das Summenzeichen (großes Sigma) dient zur vereinfachten Darstellung von Summen. Dabei läuft eine Zählvariable (hier k oft auch i oder j) von einem Startwert bis zu einem Endwert n. Man erhält die Summanden, indem man in den Term hinter dem Summenzeichen zuerst den Startwert, dann $k+1$, $k+2$ usw. einsetzt, bis die Laufvariable den Endwert erreicht

$$\sum_{k=1}^{3} k = 1+2+3 \qquad \sum_{k=5}^{7}(k-4) = (5-4)+(6-4)+(7-4)$$

$$\sum_{k=0}^{n} k = 0+1+\cdots+n \qquad \sum_{k=1}^{3}(-1)^k = (-1)^1+(-1)^2+(-1)^3$$

In Maple lautet der Befehl für das Summenzeichen `sum(2*k, k=0..n)` bzw. `Sum(2*k,0..n)`, falls man die ersten n geraden Zahlen aufaddieren möchte.

1

Berechne folgende Summen

a) Die Summe aller Quadratzahlen n^2 bis $n = 20$

b) Die Summe der ersten hundert Zahlen ≥ 1

c) Die Summe der ersten hundert ungeraden Zahlen ≥ 1

d) $\sum_{k=1}^{75}(-1)^k$; $\quad \sum_{k=1}^{100} k = \frac{1}{k}$ $\quad$ „Leibnizreihe“: $\sum_{k=0}^{n} 4 \cdot \frac{(-1)^k}{2k+1}$
(Untersuche die Leibnizreihe als Näherung („evalf“)? Achtung: $n \approx 1\,000\,000$ dauert)

Fakultät

Die **Fakultät** ist eine Fuktion, die einer natürlichen Zahl n, das Produkt aller natürlichen Zahlen (ohne Null) zuordnet, sie wird durch das ! ausgedrückt:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n \qquad \text{Beispiel: } 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$$

Als Sonderfall ist $0! =$ festgelegt („Null Fakultät“)

Analog zum Summenzeichen ist auch das Produktzeichen (großes π) definiert und somit $n! = \prod_{i=1}^{n} i$

2

Maple benutzt für Fakultät ebenfalls das !

a) Lass Maple ein paar Fakultäten berechnen

b) z.B. $\frac{5!}{3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1}$ $\qquad$ also $\frac{n!}{(n-1)!} =$ $\qquad$ kürzen!

pirmingohn@gmail.com

3

a) Sind Sinus- bzw. Cosinusfunktion gerade oder ungerade Funktionen?

b) Wenn man die Sinus- bzw. Cosinusfunktion jeweils durch ein Polynom $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x^1 + a_0$ annähern will, welche Schlussfolgerungen ergeben sich hierfür?

c) Versuche ein möglichst gutes Näherungspolynom für die Cosinusfunktion zu finden. Beginne dafür mit $f(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2$ und ergänze die Funktionsgleichung um weitere Potenzen von x

4

Die Taylorentwicklung der Sinusfunktion lautet:

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

a) Lass die Zählvariable nur bis zu endlichen Werten gehen und vergleiche die Graphen der Entwicklung mit dem der Sinusfunktion - Welcher Wert der Zählvariable liefert für das Intervall $[-\pi, \pi]$ bereits eine gute Näherung?

b) Welche Auswirkung hat der Teilterm $(-1)^k$?

c) Versuche nach dem selben Muster und mit Hilfe deiner Erkenntnissen auch für Kosinusfunktion eine solche Entwicklung u finden

Zusatzwissen für interessierte Schüler:

Man kann jede Funktion Taylor-entwickeln, jedoch ist das im allgemeinen deutlich komplizierter und man benötigt die Ableitungen und einen x-Wert, um welchen herum man die Näherung des Funktionsgraphen als Polynom wünscht. Solche Näherungen sind notwendig wenn sich Probleme (oft aus der Physik) nicht direkt lösen lassen, es gibt bei diesen Näherungen jedoch immer Abweichungen.

Maple kann selbst auch Taylor-entwickeln. So ergibt `evalf(taylor(sin(x)+3+cos(4+x),x=0,10)` die Taylorentwicklung dieser seltsamen Funktion rund um die Stelle $x = 0$ als Polynom mit 10 Gliedern (Polynom vom Grad 9 und ein Restglied $0x^{10}$ was uns sagen soll, dass es nur eine Näherung ist - fehlt so ein Restglied, so gibt es auch keine Abweichung zur tatsächlichen Funktion!

`evalf` soll in diesem Fall nur den Term anschaulicher machen.