Lösung zu Kurvendiskussion zu $f(x) = -\frac{1}{20}x^4 + \frac{2}{5}x^3 - \frac{16}{5}x$

- $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$
- y-Achsenschnittpunkt: $P(0|f(0))$ also $P(0|0)$

  $$-\frac{1}{20}x^4 + \frac{2}{5}x^3 - \frac{16}{5}x = x\left(-\frac{1}{20}x^3 + \frac{2}{5}x^2 - \frac{16}{5}\right)$$

  Somit ist $x_1 = 0$ oder der Term in der Klammer muss Null sein, falls man die Nullstelle $x_2 = 4$ errät kann man mit Hilfe einer Polynomdivision durch $(x-4)$ teilen, ansonsten sollte man Maple nutzen („solve“). Die pq-Formel liefert dann noch $x_{3;4} = 2 \pm 2\sqrt{5}$
- $f'(x) = -\frac{1}{5}x^3 + \frac{6}{5}x^2 - \frac{16}{5}$ - Hiervon kann man die Nullstelle $x_{e1} = 2$ erraten und kommt durch Polynomdisvion und pq-Formel zu den weiteren Lösungen $x_{e2;e3} = 2 \pm \sqrt{3}$ Es gilt:

  $$\begin{aligned} f''(2-\sqrt{3}) &\approx -4,8 < 0 & f(2-\sqrt{3}) &\approx 3,2 \\ f''(2) &= \frac{12}{5} > 0 & f(2) &= 4 \\ f''(2+\sqrt{3}) &\approx -4,8 < 0 & f(2+\sqrt{3}) &\approx 3,2 \end{aligned}$$

  Man kann auch argumentieren, wieso die Werte der 2. Ableitung positiv bzw. negativ sind, da es nur auf das Vorzeichen ankommt.
  $HP_1(-1,5|3,2)$, $TP(2|4)$ und $HP_2(5,5|3,2)$
- $f''(x) = -\frac{3}{5}x^2 + \frac{12}{5}x$ hast die Lösungen $x_{w1} = 2$ und $x_{w2} = 4$ und mit $f'''(x) = -\frac{6}{5}x + \frac{12}{5}$ ist $f'''(0) = \frac{12}{5} \neq 0$ und $f'''(4) = -\frac{12}{5} \neq 0$
  Da beide Wendestellen schon Nullstellen waren ist klar: $WP_1(0|0)$ und $WP_2(4|0)$
- wegen $-\frac{1}{20}x^4$ gilt: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} -\frac{1}{20}x^4 + \frac{2}{5}x^3 - \frac{16}{5}x = -\infty$
  Die Hochpunkte sind somit eine „obere Grenze“ und $\mathbb{W}_f = \{x \leq 3,2 | x \in \mathbb{R}\}$
- Der Funktionsgraph steigt monoton in den Intervallen: $(-\infty; -1,5]$ und [2;5,5] und fällt monoton in den Intervallen $[-1,5; 2]$ und $[5,5; \infty)$
- Recktskrümmung in den Intervallen $(-\infty; 0)$ und $(4; \infty)$
  Linkskrümmung im Intervall $(0; 4)$
- Der Funktionsgrad beträgt 4, daher ist höchstens eine Achsensymmetrie möglich! Da es nur einen Tiefpunkt gibt, muss die Symmetrieachse durch diesen verlaufen - daher überprüfen wir $f(x+2) = -\frac{1}{20}(x+2)^4 + \frac{2}{5}(x+2)^3 - \frac{16}{5}(x+2)$ was mit viel Rechenarbeit oder etwas Maple-Power (simplify!) ergibt $f(x+2) = -\frac{1}{20}x^4 + \frac{6}{5}x^2 - 4$, daher ist Γ_f Achsensymmetrisch zu $x = 2$