2 Differenzialrechnung

2.1 Grenzwert

Grenzwert einer Funktion

Eine Funktion f sei in einer Umgebung einer Stelle x_0 definiert. Wenn für jedes $\epsilon > 0$ ein δ existiert, so dass $f(x_0 - \delta) = a \pm \epsilon$ so hat die Funktion f für x gegen x_0 den linksseitigen Grenzwert a und man schreibt:

$$\lim_{x \nearrow x_0} f(x) = a$$

Eine Funktion f sei in einer Umgebung einer Stelle x_0 definiert (Kurzschreibweise). Wenn $\forall\ \epsilon > 0 \exists\ \delta$ mit $f(x_0 + \delta) = a \pm \epsilon$ so hat die Funktion f für x gegen x_0 den rechtsseitigen Grenzwert a und man schreibt:

$$\lim_{x \searrow x_0} f(x) = a$$

Stimmen die beiden einseitigen Grenzwerte überein schreibt man kurz:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a$$

Anschaulich: Der Funktionsgraph hat an der Stelle x_0 keine Sprungstelle

Man sagt f konvergiere für $x \to x_0$ gegen den Grenzwert a. Man kann die Variable (hier x) auch gegen $\pm\infty$ gehen lassen, wenn dies die Definitionsmenge zulässt.

Beispiel

Die Funktion $\frac{x^2 - 4}{x - 2}$ ist an der Stelle $x_0 = 2$ nicht definiert, da man durch Null teilen würde. Legt man jedoch eine Wertetabelle an, und nähert sich von „links“ x_0, so sieht man:

x	1	1,9	1,99	1,999	$\cdots$
$f(x)$	3	3,9	3,99	3,999	$\cdots$

dass sich der Funktionswert (von unten) wohl dem Wert 4 nähert (analog von oben, wenn man sich von „rechts“ her nähert). Wählt man eine beliebige Genauigkeit ϵ, so lässt sich angeben, wie nahe an x_0 herangehen muss um diese zu erreichen. Wählt man z.B. $\epsilon > 0,0001$ so muss $3,9999 < x_0 > 4,0001$ sein also $\delta < 0,0001$

Die meisten Funktionen haben keinen Grenzwert, einige wachsen sogar über alle Grenzen, man sagt sie divergieren[a] und schreibt

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty \qquad \lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$$

[a]divergere (lat.): auseinander streben

Beispiel

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x} = 0 \qquad \lim_{x \to \pm\infty} \frac{a}{x^n} = 0$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} x^2 = \infty \qquad \lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$$

Rechenregeln

Wenn die Grenzwerte $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ und $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$ existieren, dann gilt:

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \pm \lim_{x \to x_0} g(x)$$

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x)$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)} \qquad \text{falls } \lim_{x \to x_0} g(x) \neq 0$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0 \qquad \text{falls } \lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$$

2.2 Stetigkeit

Stetigkeit

Eine Funktion f heißt stetig an einer Stelle $x_0 \in \mathbb{D}$, wenn gilt:

$$\lim_{x\to} f(x) = f(x_0)$$

Eine Funktion ist stetig in einem Intervall, wenn sie in jedem Punkt des Intervalls stetig ist. Insbesondere heißt eine Funktion stetig, wenn sie in jedem Punkt der Definitionsmenge stetig ist.

Anschaulich: Funktionen, die nicht unterbrochen sind (also durchgehend gezeichnet werden können) sind stetig

Zwischenwertsatz

Ist f eine im Intervall $I = [a; b]$ stetige Funktion, so gibt es zu jedem Wert y_0 zwischen $f(a)$ und $f(b)$ mindestens eine Stelle $x_0 \in I$ mit $f(x_0) = y_0$. Insbesondere gibt es eine Nullstelle im Intervall, falls $f(a) \cdot f(b) < 0$ gilt.

2.3 Differenzierbarkeit

Differenzierbarkeit

Eine Funktion f ist genau dann differenzierbar an der Stelle $x_0 \in \mathbb{D}$, wenn der Grenzwert der Differenzenquotienten

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

existiert. Diesen Grenzwert bezeichnet man als die Ableitung (oder Differenzialquotient) von f an der Stelle x_0, kurz: $f'(x_0)$. Insbesondere müssen also der links- und rechtsseitige Grenzwert übereinstimmen.

Anschaulich: Die Ableitung kann anschaulich als Steigung des Graphen betrachtet werde (Übergang Sekantensteigung zur Tangentensteigung), eine Funktion ist also differenzierbar, wenn sie keine Lücken oder Knicke hat.

Aus differenzierbar folgt immer auch stetig (nicht umgekehrt (Knick))